

電弱統一理論

— 75分で学ぶGWS理論 —

素粒子物理学講義

Ver. 1.1

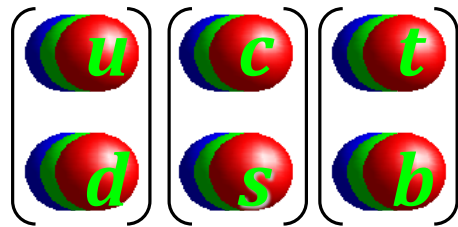
Aug. 8, 2018

武内勇司

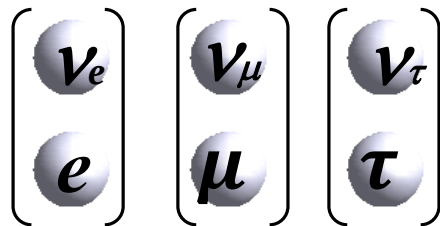
素粒子標準模型 (Standard Model)

- フェルミオン ... ディラック場 (spin 1/2), **物質の基本構成要素**
- クォーク ... カラー荷 (RGB) を持つ (強い相互作用をする)
 - レプトン ... カラー荷を持たない
- ボゾン ... スカラー場・ベクトル場 (spin 0, 1, ...)
- ゲージボゾン ... **相互作用を媒介**
 - ヒッグスボゾン ... **対称性の破れに伴い真空から発現**

クォーク



レプトン

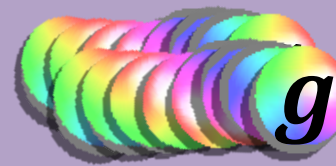


+ 上の粒子の反粒子

ゲージボゾン



ヒッグスボゾン



*今回強い相互作用は扱わない

準備: SU(2)回転群

2次の特殊ユニタリ群: $U^\dagger = U^{-1}, \det U = 1$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ として } U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$$

3実パラメータで記述

$$U = \exp(iT) \text{ と書くと } T = T^\dagger, \text{Tr } T = 0$$

$$\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R} \text{ として } T = \begin{pmatrix} \zeta & \xi - i\eta \\ \xi + i\eta & -\zeta \end{pmatrix} = \xi\tau^1 + \eta\tau^2 + \zeta\tau^3$$

やはり3実パラメータで記述

τ^1, τ^2, τ^3 (パウリ行列) は, SU(2)群の生成子でそれぞれの軸周りの回転に対応

準備：2成分スピノル(spinor)

- SU(2)回転群が作用する複素ベクトル空間の元
4実パラメータのうち大きさと位相を除くと2実パラメータの自由度(θ, φ)

- 2成分spinor [SU(2)] $\cong$ 3次元ベクトル [SO(3)]
 - 360度回転で符号が変わるのでSO(3)とは等価ではない

$$\phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\varphi}{2}\right) \cos\frac{\theta}{2} \\ \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right) \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

- スピノルはテンソルでない(1/2階のテンソルという言い方するひともいる)

$$\phi^\dagger \tau^i \phi = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \tau^i \text{はパウリ行列}$$

- 例えば電子のスピン(1/2)を記述するのに用いられる. 他にもアイソスピン($I=1/2$)など実空間とは関係ないものにも用いられる.
- 任意の Lorentz vector を表現できるように拡張 $\rightarrow$ 4成分Dirac spinor

準備: Fermion場 (Diracスピノル場)

- Dirac 方程式に従う

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi = 0$$

対応するラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi$$

オイラー方程式 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = 0$ から導くことができる

- 4成分: 粒子と反粒子の自由度を持つ(それぞれ2成分スピノル)

$$N \begin{pmatrix} \phi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \phi_s \end{pmatrix} e^{-ipx} \quad N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} e^{ipx} \quad N = \sqrt{E+m}$$

ϕ_s や χ_s は2成分スピノル

- $\bar{\psi}\psi$ は, ローレンツスカラー, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ は, ローレンツスベクター
- LとRのカイラリティがある

準備: カイラリティー(chirality)

- 掌性(右手や左手のように鏡像が同一でない)
- Dirac spinor はスピン角運動量をもつので, chirality をもつ.
- P_L, P_R : 左巻き, 右巻き状態への射影演算子

$$\psi_L \equiv P_L \psi, \quad \psi_R \equiv P_R \psi, \quad \psi = \psi_L + \psi_R$$

$$P_L + P_R = 1, \quad P_L \cdot P_R = 0$$

$$\bar{\psi}_L = (P_L \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_L \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_R = \bar{\psi} P_R$$

$$\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu$$

なので

$$\bar{\psi}_L \psi_L = 0, \quad \bar{\psi}_R \psi_R = 0$$

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R = 0, \quad \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_L = 0$$

準備: カイラリティー(chirality)

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi$$

- Dirac 粒子の質量項は, LR結合

$$\bar{\psi}\psi = \overline{(\psi_L + \psi_R)}(\psi_L + \psi_R) = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$$

つまり, 質量をもつ粒子は, Lカイラリティー状態とRカイラリティー状態混ざり合う

- Vector項(運動エネルギー項など)は, LL, RR結合

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$$

Fermion場 (Diracスピノル場)

- 弱アイソスピン T と超電荷(ハイパーチャージ) Y という量子数をもっている(この量子数は回転群の生成子に対応)
- Lカイラリティは, 弱アイソスピン $T=1/2$ をもつ.
Rカイラリティは, $T=0$!
- 弱アイソスピンとパイパーチャージ $SU(2)_L \times U(1)$ の群による変換性
 - Lカイラリティは, $SU(2) \times U(1)$
 - Rカイラリティは, $U(1)$

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \chi_L \end{pmatrix} \quad \phi_R, \chi_R$$

$\phi_L(\phi_R), \chi_L(\chi_R)$ は, それぞれL(R)カイラリティーDiracスピノル場
つまり, Lカイラリティは, $T^3=+1/2$ のFermion と $T^3=-1/2$ のFermion の
弱アイソスピンDoublet になっている

Fermion 場: $SU(2)_L \times U(1)_Y$

- Lepton 3世代, Quark 3世代

$$L_L^j \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix}^j \quad \nu_R^j \quad \ell_R^j$$

$$Q_L^j \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}^j \quad u_R^j \quad d_R^j \quad j = 1 \sim 3$$

	T	T^3	Y
ν_L	1/2	1/2	-1
ℓ_L		-1/2	
ν_R	0	0	0
ℓ_R	0	0	-2

	T	T^3	Y
u_L	1/2	1/2	1/3
d_L		-1/2	
u_R	0	0	4/3
d_R	0	0	-2/3

同じ粒子の違うカイラリティー状態(LとR)でT,Yの量子数が異なる！
何故こうなっているのか？ 分かっていない。

ゲージ変換

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi = \exp(igT^l\alpha^l)\Psi$$

T^l : 回転群の生成子 (量子数に対応する演算子)

α^l : 回転角

g : (後で出てくるゲージ場との結合の強さを表す) 定数

SU(2)の場合は, $T^l = \frac{\tau^l}{2}$ (パウリ行列)

U(1)の場合は, $T^l = \frac{Y}{2}$ (hypercharge)

$Y/2$ は, 後で計算が楽になるようにするため

$$[T^l, T^m] = if_{lmn}T^n \quad f_{lmn}: \text{群の構造定数}$$

U(1)では0だがSU(2)では ϵ_{lmn}

Fermion場 (Diracスピノル場)

$$\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi$$

- 運動エネルギー項(L-L, R-R結合項)は, $SU(2)\times U(1)$ 回転不変

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = & \bar{\Psi}_L \gamma^\mu i\partial_\mu \Psi_L \\ & + \bar{\phi}_R \gamma^\mu i\partial_\mu \phi_R + \bar{\chi}_R \gamma^\mu i\partial_\mu \chi_R\end{aligned}\quad \Psi_L = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \chi_L \end{pmatrix}$$

- L,Rカイラリティーが異なる(T, Y)の量子数をもつのでラグランジアンが質量項(L-R結合項)は, $SU(2)\times U(1)$ 回転で不変ではない.

$$m_\phi(\bar{\phi}_L \phi_R + \bar{\phi}_R \phi_L) + m_\chi(\bar{\chi}_L \chi_R + \bar{\chi}_R \chi_L)$$

ラグランジアンが $SU(2)\times U(1)$ 回転不変であるためには, Fermion場は質量項を持ってない. とりあえず質量項は抜きで考える.

大域的ゲージ変換不変

ゲージ変換： 回転群(生成子 T)による角度 α の位相空間の回転

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi = \exp(igT^l \alpha^l) \Psi$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} U^\dagger = \bar{\Psi} \exp(-igT^l \alpha^l)$$

→ 微小回転 $\delta\alpha$ の回転

$$\Psi' \simeq (1 + ig T^l \delta\alpha^l) \Psi$$

$$\delta\Psi = igT^l \Psi \delta\alpha^l$$

ラグランジアンの変化は,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} \delta\Psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} \delta(\partial_\mu\Psi) = \partial_\mu \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} \right\} \delta\Psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} \partial_\mu(\delta\Psi) \\ &= \partial_\mu \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} \delta\Psi \right\} = -g\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu T^l \Psi) \delta\alpha^l = 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\partial_\mu J_l^\mu = 0 \quad \text{但し} \quad J^{l\mu} = \bar{\Psi}\gamma^\mu T^l \Psi \quad Q \equiv J^{l0} = \Psi^\dagger T^l \Psi$$

群の生成子 T が「電荷」の演算子

ネーターの定理「系に連続的対称性があれば対応する保存則が存在する」

局所ゲージ変換不変

ゲージ変換を考える際, 全宇宙の時空において同じ回転角を考えるのは不自然 → 回転角 α_l を時空の点 x の関数とする

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi = \exp\{igT^l\alpha^l(x)\}\Psi$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}U^\dagger = \bar{\Psi}\exp\{-igT^l\alpha^l(x)\}$$

→ 運動エネルギー一項には, 時空の微分 ∂_μ が入っているので
 $\partial_\mu\alpha^l(x)$ のおつりがつく.

$$\partial_\mu\Psi' = \partial_\mu\{\exp(igT^l\alpha^l)\Psi\} = \exp(igT^m\alpha^m)\{\partial_\mu + igT^l(\partial_\mu\alpha^l)\}\Psi$$

したがって

$$\bar{\Psi}'i\partial_\mu\Psi' = \bar{\Psi}\{i\partial_\mu - gT^l(\partial_\mu\alpha^l)\}\Psi$$

局所ゲージ変換不変

$$\bar{\Psi} i \partial_{\mu} \Psi \rightarrow \bar{\Psi}' i \partial_{\mu} \Psi' \simeq \bar{\Psi} \{ i \partial_{\mu} - g T^l (\partial_{\mu} \alpha^l) \} \Psi$$

➔ 局所ゲージ変換で不変となるためには、ベクトル場 A_{μ}^l を導入して、微分演算子を共変微分とする

$$\partial_{\mu} \rightarrow \mathcal{D}_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + i g T^l A_{\mu}^l$$

但しこのベクトル場 $A^{l\mu}$ は、局所ゲージ変換において

$$A_{\mu}^l \rightarrow A_{\mu}^{l'} = A_{\mu}^l - \partial_{\mu} \alpha^l + g f_{lmn} A_{\mu}^m \alpha^n$$

のように変換をうける

局所ゲージ対称性の要求から、回転群(生成子 T^l)に対して、ゲージ場 A_{μ}^l が導入され、Dirac場との相互作用項となる

$$\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = \bar{\Psi} \gamma^{\mu} (i \partial_{\mu} - g T^l A_{\mu}^l) \Psi = \bar{\Psi} \gamma^{\mu} i \partial_{\mu} \Psi - g J^{l\mu} A_{\mu}^l$$
$$J^{l\mu} = \bar{\Psi} \gamma^{\mu} T^l \Psi$$

$SU(2)_L \times U(1)$ 局所ゲージ変換不変

局所ゲージ不変を要求すると, 自然にベクトル場(ゲージ場), 及び Fermion 場やベクトル場との相互作用が導入される

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = & \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\Psi_L}}{2} B_\mu - g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a \right) \Psi_L \\ & + \bar{\phi}_R \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\phi_R}}{2} B_\mu \right) \phi_R \\ & + \bar{\chi}_R \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\chi_R}}{2} B_\mu \right) \chi_R\end{aligned}$$

U(1): 生成子 Y , ゲージ場 B_μ , 結合定数 g'

SU(2): 生成子 $\frac{\tau^l}{2}$, ゲージ場 A_μ^l , 結合定数 g

しかしまだ Dirac 場に質量がない！

$SU(2)_L \times U(1)$ 局所ゲージ変換不変

ベクトル場(ゲージ場)のエネルギー運動量項も追加

$SU(2)$ は非可換群なので, エネルギー運動量テンソルにはおつりが付く

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{gauge}} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \\ & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^l - \partial_\nu A_\mu^l - g\epsilon_{lmn}A_\mu^m A_\nu^n)^2\end{aligned}$$

これも $SU(2)_L \times U(1)$ ゲージ変換で不変

$$B_\mu \rightarrow B_\mu' = B_\mu - \partial_\mu \beta$$

$$A_\mu^l \rightarrow A_\mu^{l'} = A_\mu^l - \partial_\mu \alpha^l + g f_{lmn} A_\mu^m \alpha^n$$

ところが, これらのベクトル場の質量項は不変ではない

$$B_\mu B^\mu \neq B_\mu' B^{\mu'} \quad A_\mu^l A^{l\mu} \neq A_\mu^{l'} A^{l'\mu'}$$

Higgs場(複素スカラー場)

- T, Yの量子数を持つ (SU(2)×U(1)回転群による変換性)
- 4つの実スカラーの自由度

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\tau^l}{2}\chi^l} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$\chi^l, v \in \mathbb{R}$

	T	T^3	Y
ϕ^+		1/2	
ϕ^0	1/2	-1/2	1

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= |i\mathcal{D}_\mu \Phi|^2 + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= \left| \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_H}{2} B_\mu - g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a \right) \Phi \right|^2 + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2 \end{aligned}$$

- スカラー場なのでカイラリティーの区別なし
- 自己エネルギー項が4乗項までである

μ^2, λ がポテンシャルの形を決める.

- 運動量項, $\Phi^\dagger \Phi$ およびその関数は, SU(2)×U(1)回転対称.

湯川結合項

Fermion場とHiggs場との相互作用も追加

例えば, Lepton ($Y(\nu_R) = 0, Y(\ell_R) = -2$)の場合

$\Psi_L(T=1/2, Y=-1), \Phi(T=1/2, Y=1), \chi_R(T=0, Y=-2)$, ならば
 $\bar{\Psi}_L \Phi \chi_R (T=0, Y=0)$

は, $SU(2)_L \times U(1)$ 局所ゲージ不変

$\phi_R(T=0, Y=0)$ に対しては, Y 荷を反転するため

$$\tilde{\Phi} \equiv i\tau^2 \Phi^*(T=1/2, Y=-1)$$

を定義して

$$\bar{\Psi}_L \tilde{\Phi} \phi_R$$

は, $SU(2)_L \times U(1)$ 局所ゲージ不変

Quark の場合も同様

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -y_\chi \bar{\Psi}_L \Phi \chi_R - y_\phi \bar{\Psi}_L \tilde{\Phi} \phi_R + \text{h.c.}$$

湯川結合行列

Quark と Lepton は3世代なので, 世代を表すindexをつける

$$\Psi_L \rightarrow \Psi_L^j \quad \phi_R \rightarrow \phi_R^j \quad \chi_R \rightarrow \chi_R^j$$

Fermion 場のHiggs場との結合項は, 異なる世代間の結合も許す

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -(\bar{\Psi}_L^j \Phi) Y_{\chi}^{jk} \chi_R^k - (\bar{\Psi}_L^j \tilde{\Phi}) Y_{\phi}^{jk} \phi_R^k + h.c.$$

行列Yを適当なユニタリ一行列Vで対角化

$$V_{\chi} Y_{\chi} V_{\chi}^{\dagger} = \text{diag}(y_{\chi}^j) = \begin{pmatrix} y_{\chi}^1 & & \\ & y_{\chi}^2 & \\ & & y_{\chi}^3 \end{pmatrix}$$

$$V_{\phi} Y_{\phi} V_{\phi}^{\dagger} = \text{diag}(y_{\phi}^j)$$

ここで, 行列Yは任意の複素行列で固有値は正の実数とは限らないがDirac場の位相の再定義により固有値を正の実数とすることが可能

湯川結合行列

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{mass}} &= -(\bar{\Psi}_L^j \Phi) Y_{\chi}^{jk} \chi_R^k - (\bar{\Psi}_L^j \tilde{\Phi}) Y_{\phi}^{jk} \phi_R^k \\
 &= -(\bar{\Psi}_L^j \Phi) (V_{\chi}^{\dagger} V_{\chi} Y_{\chi} V_{\chi}^{\dagger} V_{\chi})^{jk} \chi_R^k - (\bar{\Psi}_L^j \tilde{\Phi}) (V_{\phi}^{\dagger} V_{\phi} Y_{\phi} V_{\phi}^{\dagger} V_{\phi})^{jk} \phi_R^k \\
 &= -y_{\chi}^j (\bar{\Psi}_L V_{\chi}^{\dagger})^j \Phi (V_{\chi} \chi_R)^j - y_{\phi}^j (\bar{\Psi}_L V_{\phi}^{\dagger})^j \tilde{\Phi} (V_{\phi} \phi_R)^j
 \end{aligned}$$

場 χ が対角化された状態で世代を再定義 $(V_{\chi})^{jk} \Psi_L^k \rightarrow \Psi_L^j$

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -y_{\chi}^j \bar{\Psi}_L^j \Phi \chi_R^j - y_{\phi}^j (\bar{\Psi}_L U_{\phi})^j \tilde{\Phi} (U_{\phi}^{\dagger} \phi_R)^j$$

ここで, $V_{\phi} V_{\chi}^{\dagger} \equiv U_{\phi}$ (Lepton だとPMNS行列にあたる)と定義

Fermion 場の運動エネルギー一項は, $\Psi_L^j \rightarrow \Psi'^j_L = V^{jk} \Psi_L^k$ としても

$$\sum_j \bar{\Psi}_L^j \gamma^{\mu} i \partial_{\mu} \Psi_L^j = \sum_j \bar{\Psi}'^j_L \gamma^{\mu} i \partial_{\mu} \Psi'^j_L$$

であり, 不変

ここまでのまとめ

以上をまとめると,

- Lepton/Quark 3世代の フェルミ粒子(Dirac場)がLカイラリティとRカイラリティでそれぞれ以下のような(T, Y)の量子数をもつ.
- T=1/2, Y=1をもつスカラー場

$j = 1 \sim 3$

$$L_L^j \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix}^j$$

$$\nu_R^j \quad \ell_R^j$$

$$Q_L^j \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}^j$$

$$u_R^j \quad d_R^j$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Phi} \equiv i\tau^2 \Phi^*$$

	T	T^3	Y
ν_L	1/2	1/2	-1
ℓ_L		-1/2	
ν_R	0	0	0
ℓ_R	0	0	-2

	T	T^3	Y
u_L	1/2	1/2	1/3
d_L		-1/2	
u_R	0	0	4/3
d_R	0	0	-2/3

	T	T^3	Y
ϕ^+	1/2	1/2	1
ϕ^0		-1/2	

ここまでのまとめ: スカラー場・Fermion場・ゲージ場

ラグランジアンが局所ゲージ不変性を満たすようにゲージ場が導入され, ゲージ場とフェルミ粒子・スカラー場と相互作用が決まる.

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \left| \left(i\partial_\mu - g' \frac{1}{2} Y_H B_\mu - g \frac{\tau^l}{2} A_\mu^l \right) \Phi \right|^2 + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{kin}} = & \bar{L}_L^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\ell L}}{2} B_\mu - g \frac{\tau^l}{2} A_\mu^l \right) L_L^j \\ & + \bar{\ell}_R^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\ell R}}{2} B_\mu \right) \ell_R^j + \bar{\nu}_R^j \gamma^\mu i\partial_\mu \nu_R^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{kin}} = & \bar{Q}_L^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{QL}}{2} B_\mu - g \frac{\tau^l}{2} A_\mu^l \right) Q_L^j \\ & + \bar{u}_R^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{uR}}{2} B_\mu \right) u_R^j + \bar{d}_R^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{dR}}{2} B_\mu \right) d_R^j \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^l - \partial_\nu A_\mu^l - g \epsilon_{lmn} A_\mu^m A_\nu^n)^2$$

ここまでのまとめ: 湯川結合項(フェルミ粒子とスカラー場の相互作用)

スカラー場(Higgs場)とFermion場(L/Rカイラリティ)との結合でゲージ不変性を満たす項を導入

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{mass}} &= -(\bar{L}'^j_L \Phi) Y_\ell^{jk} \ell'^k_R - (\bar{L}'^j_L \tilde{\Phi}) Y_\nu^{jk} \nu'^k_R + \text{h. c.} \\ &= -y_\ell^j (\bar{L}^j_L \Phi) \ell^j_R - y_\nu^j [(\bar{L}_L U_\nu)^j \tilde{\Phi}] (U_\nu^\dagger \nu_R)^j + \text{h. c.}\end{aligned}$$

$$L_L^j \equiv V_\ell^{jk} L'^k_L \quad \ell_R^j \equiv V_\ell^{jk} \ell'^k_R \quad \nu_R^j \equiv V_\ell^{jk} \nu'^k_R$$

$$V_\ell Y_\ell V_\ell^\dagger \equiv \text{diag}(y_\ell^j) \quad V_\nu Y_\nu V_\nu^\dagger \equiv \text{diag}(y_\nu^j)$$

$$V_\nu V_\ell^\dagger \equiv U_\nu^\dagger \quad (U_\nu: \text{PMNS matrix})$$

down-type (荷電レプトン)の
湯川結合行列が対角化され
るように世代を再定義

up-type (ニュートリノ)の世代
は、混合する

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{mass}} &= -(\bar{Q}'^j_L \Phi) Y_d^{jk} d'^k_R - (\bar{Q}'^j_L \tilde{\Phi}) Y_u^{jk} u'^k_R + \text{h. c.} \\ &= -y_d^j [(\bar{Q}^j_L U_d)^j \Phi] (U_d^\dagger d_R)^j - y_u^j (\bar{Q}^j_L \tilde{\Phi}) u_R^j + \text{h. c.}\end{aligned}$$

$$Q_L^j \equiv V_u^{jk} Q'^k_L \quad u_R^j \equiv V_u^{jk} u'^k_L \quad d_R^j \equiv V_u^{jk} d'^k_L$$

$$V_u Y_u V_u^\dagger \equiv \text{diag}(y_u^j) \quad V_d Y_d V_d^\dagger \equiv \text{diag}(y_d^j)$$

$$V_d V_u^\dagger \equiv U_d^\dagger \quad (U_d: \text{CKM matrix})$$

up-type quarkの湯川結合行
列が対角化されるように世代
を再定義

down-type (ニュートリノ)の世
代は、混合する

レプトンとゲージ場との相互作用項

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{kin}} &= \bar{L}_L^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\ell L}}{2} B_\mu - g \frac{\tau^l}{2} A_\mu^l \right) L_L^j \\
 &\quad + \bar{\ell}_R^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\ell R}}{2} B_\mu \right) \ell_R^j + \bar{\nu}_R^j \gamma^\mu i\partial_\mu \nu_R^j \\
 &= \bar{\ell}^j \gamma^\mu i\partial_\mu \ell^j + \bar{\nu}^j \gamma^\mu i\partial_\mu \nu^j \\
 &\quad + \bar{L}_L^j \gamma^\mu \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \textcolor{red}{-gA_\mu^3 + g'B_\mu} & \textcolor{blue}{-g(A_\mu^1 - iA_\mu^2)} \\ \textcolor{blue}{-g(A_\mu^1 + iA_\mu^2)} & gA_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} L_L^j \\
 &\quad + \bar{\ell}_R^j \gamma^\mu (g'B_\mu) \ell_R^j
 \end{aligned}$$

$\textcolor{red}{\nu\nu}$ と結合する場としてZボゾン, $\textcolor{blue}{\nu e}$ と結合する場としてWボゾンを定義.
 Zボゾンは, U(1)ゲージ場が混ざってくるので純粋なLカイラリティとの結合ではなくなる

レプトンとゲージ場との相互作用項

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{kin}} &= \bar{\ell}^j \gamma^\mu i \partial_\mu \ell^j + \bar{\nu}^j \gamma^\mu i \partial_\mu \nu^j \\ &+ \bar{L}_L^j \gamma^\mu \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{g}{\cos\theta_W} Z_\mu & -\sqrt{2}gW_\mu \\ -\sqrt{2}gW_\mu^\dagger & 2eA_\mu + \frac{g}{\cos\theta_W} (1 - 2\sin^2\theta_W) Z_\mu \end{pmatrix} L_L^j \\ &+ \bar{\ell}_R^j \gamma^\mu (g' B_\mu) \ell_R^j\end{aligned}$$

$$W_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 - iA_\mu^2) \quad W_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 + iA_\mu^2) \quad \leftarrow \text{W ボゾン}$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Z ボゾン} \\ \leftarrow \text{フォトン} \text{は, Zボゾンと直交する場として定義} \end{array}$$

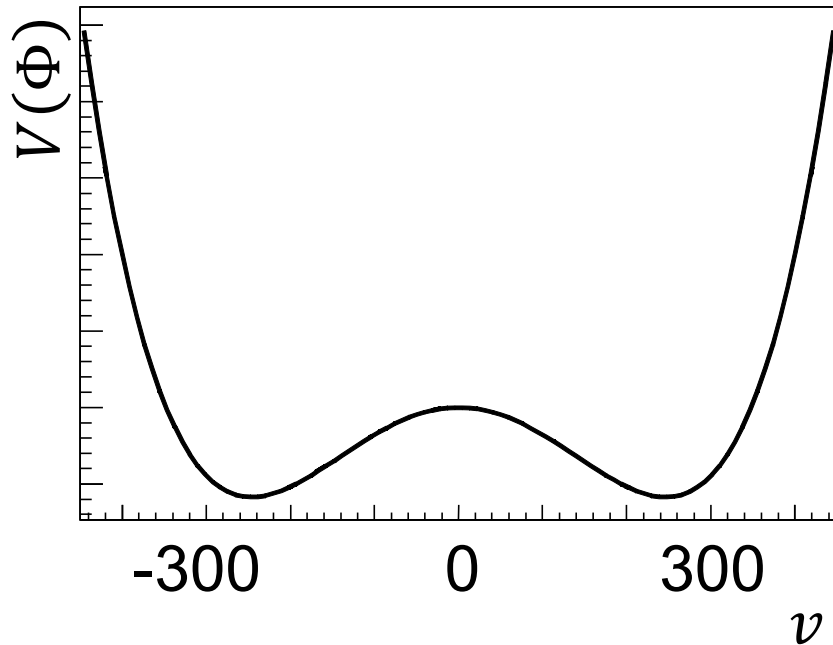
$$\cos\theta_W \equiv \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \sin\theta_W \equiv \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad e \equiv \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g\sin\theta_W$$

自発的対称性の破れ

Higgs場の自己エネルギーポテンシャル

$$V(\Phi) \equiv -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

$$\Phi = e^{i\frac{\tau^l}{2}\chi^l} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$



このポテンシャルは,

$$\frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$$

で最小になる.

- これを真空と再定義
- この真空を基準とした場を ϕ で定義
→ヒッグス粒子
- χ^l の3つのパラメータは自由なので0に固定 → 3つの自由度消失

$$\Phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \phi \end{pmatrix} \quad \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$$

ゲージとHiggs場(スカラー場)との結合項

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= \left| \left(i\partial_\mu - g' \frac{1}{2} Y_H B_\mu - g \frac{\tau^l}{2} A_\mu^l \right) \Phi \right|^2 + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= \left| i\partial_\mu - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} gA_\mu^3 + g'B_\mu & g(A_\mu^1 - iA_\mu^2) \\ g(A_\mu^1 + iA_\mu^2) & -gA_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \Phi \right|^2 \\ &\quad + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= \left| i\partial_\mu - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} gA_\mu^3 + g'B_\mu & \sqrt{2}gW_\mu \\ \sqrt{2}gW_\mu^\dagger & -\frac{g}{\cos\theta_W} Z_\mu \end{pmatrix} \Phi \right|^2 \\ &\quad + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2\end{aligned}$$

真空の再定義 $\Phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ により, WボゾンとZボゾンが質量をもつ.
フォトンの質量項は存在しない.

自発的対称性の破れ

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \phi \end{pmatrix} \quad \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$$

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ の対称性が破れ $U(1)_Q$ の対称性のみが残った

	T	T^3	Y	$Q = T^3 + Y/2$
ν_L	1/2	1/2	-1	0
ℓ_L		-1/2		-1
ν_R	0	0	0	0
ℓ_R	0	0	-2	-1

	T	T^3	Y	Q
u_L	1/2	1/2	1/3	2/3
d_L		-1/2		-1/3
u_R	0	0	4/3	2/3
d_R	0	0	-2/3	-1/3

Φ を $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称なラグランジアンへ代入して, いろいろ整理すると標準模型のラグランジアンが出てくる

	T	T^3	Y	Q
ϕ^+	1/2	1/2	1	1
ϕ^0		-1/2		0

自発的対称性の破れ後のLagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^l - \partial_\nu A_\mu^l - g\epsilon_{lmn}A_\mu^m A_\nu^n)^2$$

$$\rightarrow -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^Z F^{Z\mu\nu} - \frac{1}{4}(\mathcal{D}_\mu W_\nu - \mathcal{D}_\nu W_\mu)^\dagger (\mathcal{D}^\mu W^\nu - \mathcal{D}^\nu W^\mu)$$

フォトンの運動量
Zの運動量
Wの運動量, WW γ , WWZ

$$-i(eF_{\mu\nu}^A + g\cos\theta_W F_{\mu\nu}^Z)W^{\dagger\mu}W^\nu + \frac{g^2}{2}(|W_\mu W^\mu|^2 - |W_\mu W^\nu|^2)$$

WW γ , WWZ
WWWW

$$W_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2) \quad W_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2) \quad \text{W ボゾン}$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

Z ボゾン
フォトン

$$F_{\mu\nu}^Z \equiv \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$$

$$F_{\mu\nu}^A \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\cos\theta_W \equiv \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \sin\theta_W \equiv \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$e \equiv \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g\sin\theta_W$$

$$\sin^2\theta_W \sim 0.23$$

$$\mathcal{D}_\mu W_\nu \equiv (\partial_\mu + igA_\mu^3)W_\nu = (\partial_\mu + ieA_\mu + ig\cos\theta_W Z_\mu)W_\nu$$

Weinberg 角

自発的対称性の破れ後のLagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \left| \left(i\partial_\mu - g' \frac{1}{2} Y_H B_\mu - g \frac{\tau^l}{2} A_\mu^l \right) \Phi \right|^2 + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & \underbrace{M_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu}_{\text{W ボゾン質量}} + \underbrace{\frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu^2}_{\text{Z ボゾン質量}} + \underbrace{\left(g M_W \phi + \frac{g^2}{4} \phi^2 \right) \left(W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_W} Z_\mu^2 \right)}_{\text{HWW, HHWW, HZZ, HHZZ}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right]}_{\text{H 運動量, 質量}} - \underbrace{\frac{m\sqrt{\lambda}}{2} \phi^3}_{\text{HHH}} - \underbrace{\frac{\lambda}{8} \phi^4}_{\text{HHHH}} - V\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

$$M_W \equiv \frac{gv}{2}$$

W ボゾン質量

$$M_Z \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v = \frac{M_W}{\cos \theta_W}$$

Z ボゾン質量

$$m \equiv \sqrt{2} \mu$$

ビッグス質量

自発的対称性の破れ後のLagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{kin}} = \bar{L}_L^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\ell L}}{2} B_\mu - g \frac{\tau^l}{2} A_\mu^l \right) L_L^j \\ + \bar{\ell}_R^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\ell R}}{2} B_\mu \right) \ell_R^j + \bar{\nu}_R^j \gamma^\mu i\partial_\mu \nu_R^j$$

$$\rightarrow \bar{\ell}^j \gamma^\mu i\partial_\mu \ell^j + \bar{\nu}^j \gamma^\mu i\partial_\mu \nu^j + \mathcal{L}_{\text{EW int}}^{(\text{lepton})}$$

$$\mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{kin}} = \bar{Q}_L^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{QL}}{2} B_\mu - g \frac{\tau^l}{2} A_\mu^l \right) Q_L^j \\ + \bar{u}_R^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{uR}}{2} B_\mu \right) u_R^j + \bar{d}_R^j \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{dR}}{2} B_\mu \right) d_R^j$$

$$\rightarrow \bar{u}^j \gamma^\mu i\partial_\mu u^j + \bar{d}^j \gamma^\mu i\partial_\mu d^j + \mathcal{L}_{\text{EW int}}^{(\text{quark})}$$

$$\mathcal{L}_{\text{EW int}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (J^{\mu\dagger} W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) - e J_{EM}^\mu A_\mu - \frac{g}{\cos \theta_W} J_Z^\mu Z_\mu$$

$$J^\mu \equiv \bar{\ell}_L^j \gamma^\mu \nu_L^j + \bar{d}_L^j \gamma^\mu u_L^j \quad J_{EM}^\mu \equiv (-) \bar{\ell}^j \gamma^\mu \ell^j + \left(\frac{2}{3} \right) \bar{u}^j \gamma^\mu u^j + \left(-\frac{1}{3} \right) \bar{d}^j \gamma^\mu d^j$$

$$J^{3\mu} \equiv \bar{L}_L^j \gamma^\mu \frac{\tau^3}{2} L_L^j + \bar{Q}_L^j \gamma^\mu \frac{\tau^3}{2} Q_L^j = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L^j \gamma^\mu \nu_L^j - \frac{1}{2} \bar{\ell}_L^j \gamma^\mu \ell_L^j + \frac{1}{2} \bar{u}_L^j \gamma^\mu u_L^j - \frac{1}{2} \bar{d}_L^j \gamma^\mu d_L^j$$

$$J_Z^\mu \equiv J^{3\mu} - \sin^2 \theta_W J_{EM}^\mu$$

自発的対称性の破れ後のLagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{mass}} = -y_\ell^j (\bar{L}_L^j \Phi) \ell_R^j - y_\nu^j [(\bar{L}_L U_\nu)^j \tilde{\Phi}] (U_\nu^\dagger \nu_R)^j + \text{h. c.}$$

$$\rightarrow -\left(m_\ell^j + \frac{y_\ell^j}{\sqrt{2}} \phi\right) \bar{\ell}^j \ell^j - \left(m_\nu^j + \frac{y_\nu^j}{\sqrt{2}} \phi\right) \bar{\hat{\nu}}^j \hat{\nu}^j$$

flavor 固有状態
 $\nu^j \equiv U_\nu^{jk} \hat{\nu}^k$
 質量固有状態

$$\mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{mass}} = -y_d^j [(\bar{Q}_L^j U_d)^j \Phi] (U_d^\dagger d_R)^j - y_u^j (\bar{Q}_L^j \tilde{\Phi}) u_R^j + \text{h. c.}$$

$$\rightarrow -\left(m_d^j + \frac{y_d^j}{\sqrt{2}} \phi\right) \bar{\hat{d}}^j \hat{d}^j - \left(m_u^j + \frac{y_u^j}{\sqrt{2}} \phi\right) \bar{u}^j u^j$$

flavor 固有状態
 $d^j \equiv U_d^{jk} \hat{d}^k$
 質量固有状態

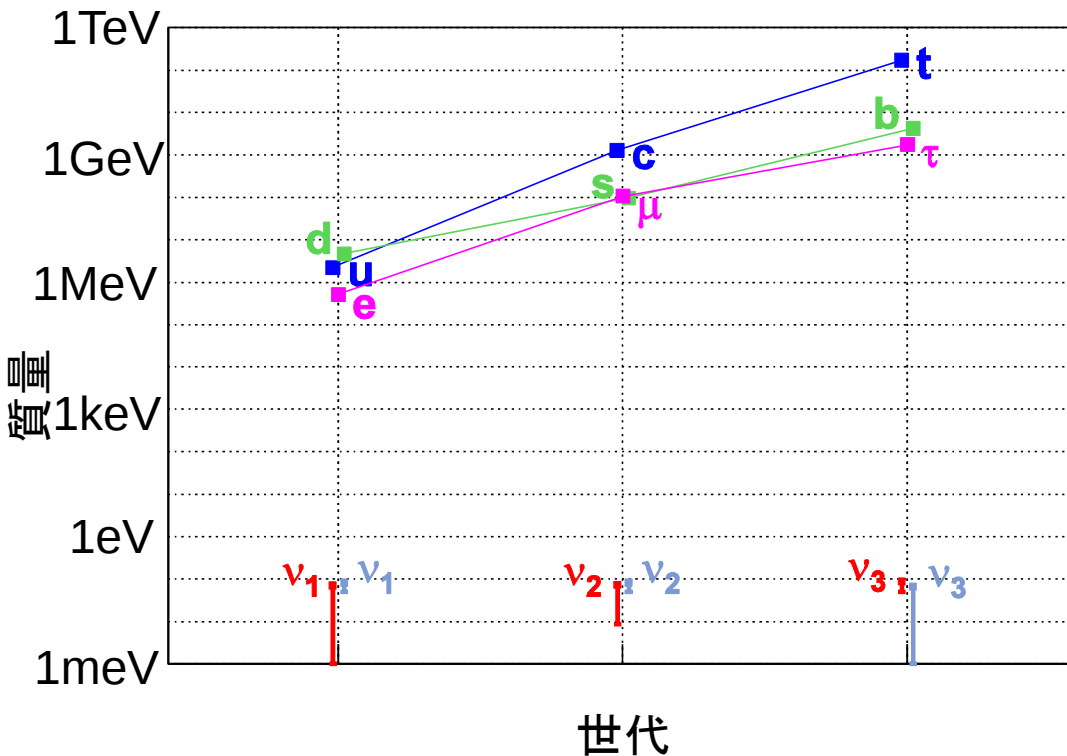
$$m_f^j \equiv \frac{y_f^j v}{\sqrt{2}} \quad f = \ell, \nu, u, d$$

電弱理論のまとめ

- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 回転群で変換するFermion場(Dirac場) が Lepton とQuarkでそれぞれ3世代
- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 回転群で変換するScalar場. 自己エネルギー項は極小値を持つ
- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称なLagrangian
- ゲージ場(ベクトル場)は, 局所ゲージ不変の要請から自然に導入され, Fermion場とScalar場との相互作用も自然と決まる.
- 自発的対称性の破れにより, $U(1)_Q$ の対称性のみのがのこり, ゲージ場(photonを除く)とフェルミオン場が質量をもつ

疑問

- どうして左右のカイラリティで変換性が異なるのか？
- フェルミ粒子はなぜ3世代なのか？
- ヒッグス場のポテンシャルの形は正しいのか？
- ニュートリノの質量が異常に小さいのはなぜか？
- CKM行列は対角行列に近いのにPMNS行列はなぜ非対角成分が大きいのか？



$$U_{\text{CKM}} = \begin{bmatrix} u & d & s & b \\ c & & & \\ t & & & \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{bmatrix} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{bmatrix}$$

レポート(後半)

- レポートNo.1～4の各回から最低1題ずつ(つまり最低4題)回答
- 提出〆切: 2018/10/1(月) 17:00
- 提出場所: 専攻事務室前レポート箱
- 前半/後半のレポートは混ぜない(まとめてホッチキス止めはしない)
- 授業で配布した資料, レポートは下記URLに

<http://hep-www.px.tsukuba.ac.jp/~yuji/class/ppclass/index.html>