素粒子物理学 後半 レポート問題 No.4

2017/7/28 Y.Takeuchi

1. Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 行列

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ & 1 & \\ -s_{13}e^{i\delta_{13}} & & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & \\ -s_{12} & c_{12} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12} & c_{12} & \\ -c_{12}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -s_{12}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{13} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}\,c_{13} & s_{12}\,c_{13} & s_{13}\,e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}\,c_{23} - c_{12}\,s_{23}\,s_{13}\,e^{i\delta_{13}} & c_{12}\,c_{23} - s_{12}\,s_{23}\,s_{13}\,e^{i\delta_{13}} & s_{23}\,c_{13} \\ s_{12}\,s_{23} - c_{12}\,c_{23}\,s_{13}\,e^{i\delta_{13}} & -c_{12}\,s_{23} - s_{12}\,c_{23}\,s_{13}\,e^{i\delta_{13}} & c_{23}\,c_{13} \end{pmatrix}$$

$\theta_{12} = 13.04 \pm 0.05°$ $\qquad \theta_{23} = 2.38 \pm 0.06°$ $\qquad \theta_{13} = 0.201 \pm 0.011°$ $\qquad \delta_{13} = 1.20 \pm 0.08\,\mathrm{rad}$

に対して次の様に定義する．

$$\lambda \equiv s_{12} \qquad A\lambda^2 \equiv s_{23} \qquad A\lambda^3(\rho - i\eta) \equiv s_{13}e^{-i\delta_{13}}$$

$$\lambda \sim 0.226 \qquad A \sim 0.81 \qquad \rho \sim 0.14 \qquad \eta \sim 0.35$$

CKM行列は，次の様に Wolfenstein 表記で書けることを確かめよ．

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\,\lambda^3\,(\rho - i\,\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\,\lambda^2 \\ A\,\lambda^3\,(1 - \rho - i\,\eta) & -A\,\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4)$$

次に，CKM行列Vのユニタリティ条件 $V^\dagger V = 1$ から

$$V_{ud}^* V_{ub} + V_{cd}^* V_{cb} + V_{td}^* V_{tb} = 0$$

が言えることを示せ．また，上のWolfenstein表記(λ^3まで)を使ってこの等式を確かめよ．

この条件は，

$$1 + \frac{V_{ud}^* V_{ub}}{V_{cd}^* V_{cb}} + \frac{V_{td}^* V_{tb}}{V_{cd}^* V_{cb}} = 0$$

と書け，次の 3 つ複素数(β, α, γ)が複素平面上に三角形を作ることを意味する．

$$(\beta, \alpha, \gamma) \equiv \left(1, 1 + \frac{V_{ud}^* V_{ub}}{V_{cd}^* V_{cb}}, 1 + \frac{V_{ud}^* V_{ub}}{V_{cd}^* V_{cb}} + \frac{V_{td}^* V_{tb}}{V_{cd}^* V_{cb}} \right)$$

Wolfenstein表記を表記を使い，$(\beta,\ \alpha,\ \gamma)$を複素平面上に図示せよ．この三角形は，ユニタリティ三角形と呼ばれる．

（裏に続く）

2. Z粒子のフェルミオン対への崩壊($Z \to f\bar{f}$)の行列要素は，

$$\mathfrak{M}(Z \to f\bar{f}\,) - i\frac{g}{\cos\theta_W} J^{\rm NC}_\mu Z^\mu = -i\frac{g}{\cos\theta_W}(J^3_\mu - \sin^2\theta_W j^{\rm em}_\mu) Z^\mu$$

$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}[\bar{\psi}_L \gamma_\mu (T^3 - \sin^2\theta_W Q)\psi_L + \bar{\psi}_R \gamma_\mu (-\sin^2\theta_W Q)\psi_R] Z^\mu$$

と書けるので，分岐比は，

$$|\mathfrak{M}|^2 \propto |T^3 - \sin^2\theta_W Q|^2 + |\sin^2\theta_W Q|^2$$

に比例する．

Particle Data Group によるとZ粒子の崩壊分岐比は，

$Z \to \ell\bar{\ell}$ ($\ell = e, \mu, \tau$)	$\sim$3%
$Z \to$ invisible($\nu_e\bar{\nu}_e + \nu_\mu\bar{\nu}_\nu + \nu_\tau\bar{\nu}_\tau$)	$\sim$20%
$Z \to u\,\bar{u}$ ($u = u, c$: up-type quark)	11.6%
$Z \to d\,\bar{d}$ ($d = d, s, b$: down-type quark)	15.6%

となっている．以下の表を完成させて，崩壊分岐比を説明せよ．($\sin^2\theta_W \sim 0.23$)

lepton, quark はそれぞれ三世代あり，quark は，colorが三種類あることに注意せよ．

(但し，Zは質量の大小関係から top quark 対には崩壊できない($m_Z < 2m_t$)ため，up-type quark の実効的な世代数に注意．)

	T_3	Q	$L \equiv \|T_3 - \sin^2\theta_W Q\|^2$	$R \equiv \|\sin^2\theta_W Q\|^2$	$\Gamma \equiv L + R$	$\Gamma \times N_{\rm color} \times N_{\rm generation}$	$\frac{\Gamma \times N_{\rm color}}{\rm sum}$
ν_ℓ	1/2	0	$(1/2)^2 = 0.25$	0	0.25	$0.25 \times 1 \times 3 = 0.75$	
ℓ	$-1/2$						
u	1/2						
d	$-1/2$						
						sum=	