

[1]

2成分spinor の i -軸まわりの角度 θ の回転演算は,

$$R_i(\theta) = e^{-i\sigma_i\theta/2}$$

と書ける. ここで, σ_i は, Pauli matrix

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である.

1) 以下を示せ.

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$[\text{hint}] \quad R_i(\theta) = 1 - i\sigma_i\theta/2 + (-i\sigma_i\theta/2)^2/2! + (-i\sigma_i\theta/2)^3/3! + (-i\sigma_i\theta/2)^4/4! + \dots$$

2) 2成分spinorの3-軸成分の固有状態 $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及び $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を2-軸まわりに $\pi/2$ の回転を行い 1-軸成分の固有状態 $|R\rangle, |L\rangle$ を求めよ. 但し $\sigma_1|R\rangle = |R\rangle$, $\sigma_1|L\rangle = -|L\rangle$

3) 2)の結果を用い, 以下を確かめよ.

$$(J=1, J_Z=1): \quad |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle = |R\rangle|R\rangle - |R\rangle|L\rangle - |L\rangle|R\rangle + |L\rangle|L\rangle$$

$$(J=1, J_Z=0): \quad |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle = |R\rangle|R\rangle - |L\rangle|L\rangle$$

$$(J=1, J_Z=-1): \quad |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle = |R\rangle|R\rangle + |R\rangle|L\rangle + |L\rangle|R\rangle + |L\rangle|L\rangle$$

$$(J=0, J_Z=0): \quad |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle = |R\rangle|L\rangle - |L\rangle|R\rangle$$

[2]

Klein-Gordon 方程式 $(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi = 0$ の解について

$$\rho \equiv \int d^3x i[\psi^*(\partial_t\psi) - (\partial_t\psi^*)\psi]$$

と定義すると, $\frac{d\rho}{dt} = 0$ となることを示せ.

[hint] Green の定理: $\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dv = \int_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds$ を使ってよい.