素粒子物理学 レポート問題 No.3

Jun 24, 2019

[1].

1） $\gamma^0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\gamma^i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ とする．

以下の等式を確かめよ．

$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$

$\gamma^{0\dagger}=\gamma^0 \qquad \gamma^{i\dagger}=-\gamma^i$

2） $u_s(\vec{p})=N\begin{pmatrix} \phi_s \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\phi_s \end{pmatrix}$，$v_r(\vec{p})=N\begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}$，$N=\sqrt{E+m}$

$s,r=1,2$ 但し $\phi_s^\dagger\phi_r=\delta_{sr}$，$\chi_s^\dagger\chi_r=\delta_{sr}$

とする．以下を確かめよ．

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2=\vec{p}^{\,2}$$

$$u_s^\dagger(\vec{p})u_r(\vec{p})=v_s^\dagger v_r=2E\,\delta_{sr} \qquad u_s^\dagger(\vec{p})v_r(-\vec{p})=0$$

$$\bar{u}_s(\vec{p})u_r(\vec{p})=-\bar{v}_s v_r=2m\,\delta_{sr} \qquad \bar{u}_s(\vec{p})v_r(\vec{p})=0$$

$$\sum_{s=1,2}u_s(p)\bar{u}_s(p)=\not{p}+m \qquad \sum_{s=1,2}v_s(p)\bar{v}_s(p)=\not{p}-m$$

$$(\not{p}-m)u=0 \qquad (\not{p}+m)v=0 \qquad \bar{u}\,(\not{p}-m)=0 \qquad \bar{v}\,(\not{p}+m)=0$$

但し Feynman slash notation $\gamma^\mu a_\mu=\not{a}$

[2].

z(3軸)方向への速度βの Lorentz boost（観測者の系に対してz(3軸)方向に速度βで動いている系におけるベクトルxを，観測者が観測するベクトルx'への変換）

$$x'^\mu=a^\mu{}_\nu x^\nu=\begin{pmatrix} \gamma & & & \beta\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \beta\gamma & & & \gamma \end{pmatrix} \qquad \gamma^2\beta^2=\gamma^2-1$$

に対して，

$$S=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\begin{pmatrix} 1 & \sigma_3\dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1} \\ \sigma_3\dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1} & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$S^{-1}\gamma^\mu S=a^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

$$S^{-1}=\gamma^0 S^\dagger\gamma^0$$

となることを示せ．但し $\gamma^0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\gamma^i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$

[Hint]

Pauli行列に対して

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad \sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=2\delta_{ij}$$

が成り立つ．すなわち $\sigma_i\sigma_3+\sigma_3\sigma_i=2\delta_{i3}$ ，$\sigma_3\sigma_i\sigma_3=2\delta_{i3}\sigma_3-\sigma_i$