素粒子物理学 レポート問題 No.4

Jul 1, 2019

[1].

次の等式を証明せよ。(Gordon decomposition)

$$\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)=\bar{u}(p')\left[\frac{(p'+p)^{\mu}}{2m}+\frac{i}{2m}\sigma^{\mu\nu}k_{\nu}\right]u(p) \qquad \text{where } k^{\mu}\equiv(p'-p)^{\mu}$$

但し $\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]$

(hint: $\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=2g^{\mu\nu}$, $\bar{u}\,\not{p}'=m\bar{u}$, $\not{p}u=mu$ を使う)

[2].

電荷 qe, スピンs, 質量m, 運動量 $\vec{p}$ (非相対論的 $|\vec{p}\,|\ll m$)の Dirac粒子の時間に依存しない静磁場 $A^{\mu}=\left(0,\vec{A}\right)$中のポテンシャルを考える. Gordon decomposition を用いると相互作用ポテンシャル項は,

$$qe\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \quad \rightarrow \qquad U=qe\frac{1}{m}\bar{u_s}u_s p^{\mu}A_{\mu}+qe\frac{1}{2m}\bar{u}_s\sigma^{\mu\nu}u_s\partial_{\nu}A_{\mu}$$

と書ける. 但し $\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]$

ここで, 粒子が非相対論的運動をしていることから

$$|\vec{p}\,|\ll m\sim E$$

$$u=N\begin{pmatrix}\phi_s\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\phi_s\end{pmatrix}\rightarrow N\begin{pmatrix}\phi_s\\ 0\end{pmatrix} \qquad N=1$$

$$\phi_s^{\dagger}\phi_s=1 \qquad \phi_s^{\dagger}\sigma_k\phi_s\equiv\vec{\sigma}$$

を仮定すると, 上の式は,

$$U=-qe\vec{v}\cdot\vec{A}-\frac{qe}{2m}\vec{\sigma}\cdot\bar{B}$$

と書けることを示せ.

Hint: $\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad B_k=\varepsilon_{ijk}\partial_i A_j$