素粒子物理学 レポート問題 No.6

Jul 22, 2019

[1].

μ粒子の崩壊($\mu^-(p)\to e^-(p')+\bar{\nu}_e(k')+\nu_\mu(k)$)における行列要素

$$\sum_{\rm spin}|\mathcal{M}|^2=\frac{G_F^2}{2}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)(\not p+m)\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not k]\times\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not k'\gamma_\nu(1-\gamma^5)\not p']$$

を計算すると

$$\sum_{\rm spin}|\mathcal{M}|^2=\frac{G_F^2}{2}\times 256(k\cdot p')(k'\cdot p)$$

となることを示せ.(以下の公式を使う)

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma]=4[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}]$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma]=4i\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\gamma\delta}=-2(g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}-g^{\rho\delta}g^{\sigma\gamma})$$

[2].

(全領域にわたる積分において成り立つ)次の等式を確かめよ.

$$\frac{d^3p}{2E}=d^4p\delta(p^2-m^2)\theta(E)\qquad \text{where}\ \ p=(E;\vec{p}),\ \ E=\sqrt{m^2+\vec{p}^{\,2}},\ \ \theta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

また,

$$\frac{d^3p}{2E}=\frac{|p|}{2}dEd\Omega$$

とも書けることを示せ.

Hint: デルタ関数の公式

$$\delta(f(x))=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}\qquad \text{where}\ \ f(x_i)=0$$

を使えば

$$\delta(m^2-p^2)\theta(E)=\frac{\delta\Big(E-\sqrt{m^2+\vec{p}^{\,2}}\Big)}{2E}$$

となることを示し,dE の積分を実行すればよい.

[3].

静止した特定の方向を持たない粒子の3体崩壊におけるdLIPSは,

$$d\Phi_3(m;p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{4(2\pi)^3}dE_1dE_2$$

と書けることを示せ.

Hint: 前問の等式を使えば3体崩壊のdLIPSは,

$$d\Phi_3(m;p_1,p_2,p_3)=(2\pi)^4\delta^4(p-p_1-p_2-p_3)\frac{d^3p_1}{(2\pi)^32E_1}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^32E_2}\frac{d^3p_3}{(2\pi)^32E_3}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^5}\delta^4(p-p_1-p_2-p_3)\frac{d^3p_1}{2E_1}\frac{d^3p_2}{2E_2}d^4p_3\theta(E_3)\delta(p_3^2-m_3^2)$$

ここで，d^4p_3 の積分を実行すると更に

$$d\Phi_3(m;p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{(2\pi)^5}\frac{d^3p_1}{2E_1}\frac{d^3p_2}{2E_2}\theta(m-E_1-E_2)\delta((p-p_1-p_2)^2-m_3^2)$$

と書ける．更に前問により，

$$\frac{d^3p_1}{2E_1}=\frac{p_1}{2}dE_1d\Omega_1 \qquad \frac{d^3p_2}{2E_2}=\frac{p_2}{2}dE_2d(\cos\theta_{12})d\varphi_2$$ 　　但しθ_{12}は，$\vec{p}_1$と$\vec{p}_2$のなす角

親粒子に特定の方向がないとして，$d\Omega_1$，$d(\cos\theta_{12})$，$d\varphi_2$での積分を実行する．

[4].

μ粒子の崩壊幅(自然単位系)

$$\Gamma=\frac{G_F^2m^5}{192\pi^3} \qquad G_F=1.17\times10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2},\ \ m=0.1057\,\mathrm{GeV}$$

から寿命を計算せよ．

自然単位系においてエネルギーから時間への変換は，$\hbar=6.58\times10^{-25}\,\mathrm{GeV}\cdot s$ を使う