素粒子物理学
— 準備（電磁気） —

素粒子物理学0AJC041/01BC098

2025年度春bc

武内勇司

Euler-Lagrange方程式

$$\underbrace{I[\eta(x)]}_{\text{作用汎関数}} \equiv \int_{\Omega_4} d^4x\,\mathcal{L}\left(\eta(x), \partial_\mu \eta(x)\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega_3} d^3x\,\mathcal{L}\left(\eta(x), \partial_\mu \eta(x)\right)$$

$$I[\eta + \delta\eta] = \int_{\Omega_4} d^4x\,\mathcal{L}\left(\eta + \delta\eta, \partial_\mu \eta + \delta(\partial_\mu \eta)\right) = I[\eta] + \int_{\Omega_4} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)}\delta(\partial_\mu \eta)\right]$$

$\delta(\partial_\mu \eta) = \partial_\mu \delta\eta \quad \delta\eta = 0$ on $\partial\Omega_4$ （領域Ω_4の境界で$\delta\eta = 0$）

$$\delta I = I[\eta + \delta\eta] - I[\eta] = \int_{\Omega_4} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)}\delta(\partial_\mu \eta)\right] = \int_{\Omega_4} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)}\partial_\mu \delta\eta\right]$$

$$= \int_{\Omega_4} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)}\right]\delta\eta$$

$\delta(\partial_\mu \eta) = \partial_\mu \delta\eta$

2項目を部分積分

最小作用の原理 $\quad \delta I = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)} = 0$

相対論形式での電磁気学

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Field strength tensor

$A_\mu = (\phi\,, -\vec{A})$

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_t A_x - \partial_x \phi & -\partial_t A_y - \partial_y \phi & -\partial_t A_z - \partial_z \phi \\ & 0 & -\partial_x A_y + \partial_y A_x & -\partial_x A_z + \partial_z A_x \\ & & 0 & -\partial_y A_z + \partial_z A_y \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

定義から反対称テンソル
※ 独立成分のみ表記

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$　及び　$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\phi$ を使うと

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

相対論形式での電磁気学

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

電磁場の Lagrangian density

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}^T\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)$$

電磁場自体のエネルギー密度に関係する項

※ 2項目の符号が負なのでエネルギー密度ではない。

$$j^\mu A_\mu = \rho\phi - \vec{j}\cdot\vec{A}$$

粒子の電荷・電流と電磁場の相互作用に関係する項

相対論形式での電磁気学

E-L方程式 $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\mu}-\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^\mu)}=0$$ $$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-j^\mu A_\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)}(\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta A^\alpha)(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)$$
$$=\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)}(\partial^\alpha A^\beta\partial_\alpha A_\beta-\partial^\alpha A^\beta\partial_\beta A_\alpha-\partial^\beta A^\alpha\partial_\alpha A_\beta+\partial^\beta A^\alpha\partial_\beta A_\alpha)=4\partial^\nu A_\mu-4\partial_\mu A^\nu$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\mu}-\partial_\nu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^\mu)}\right\}=\frac{1}{4}\partial_\nu\left\{\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right\}-j_\mu=\partial_\nu\partial^\nu A_\mu-\partial_\mu\partial_\nu A^\nu-j_\mu=0$$

$\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^\nu$ これは，Maxwell 方程式になっている

相対論形式での電磁気学

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

真空中の Maxwell 方程式 $\quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \quad \Longleftarrow \quad \partial_i E_i = \rho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \quad \Longleftarrow \quad -\partial_t E_i + \varepsilon_{ijk}\partial_j B_k = j_i$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \end{array}\right. \quad \Longleftarrow \quad \left.\begin{array}{l} \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}\phi \end{array}\right\} \ A^\mu = (\phi\,,\vec{A}) \text{ と } \vec{B},\ \ \vec{E} \text{の関係}$$

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu(\partial^\nu A^\mu) = j^\nu$ に ∂_νを作用させると
$\partial_\mu j^\mu = 0$：連続の方程式（電荷の保存）も得られる。

電磁ポテンシャルのゲージ不定性

$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ と $\vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\nabla\phi$を満たす$A^{\mu}$には，Λを任意のスカラー場として，

$$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda \qquad\qquad \phi'=\phi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

の不定性がある．これをまとめて書くと $A'_{\mu}=A_{\mu}-\partial_{\mu}\Lambda$

$$\vec{B}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\Lambda\right)=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$$

$$\vec{E}'=-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}-\vec{\nabla}\phi'=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\Lambda\right)}{\partial t}-\vec{\nabla}\phi+\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\phi=\vec{E}$$

$\vec{A}'$ と ϕ'から，同じく $\vec{E}$と $\vec{B}$が与えられる。

電磁ポテンシャルのゲージの固定

$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$　というゲージ変換を考える。

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu - \Box \Lambda \qquad \text{但し} \quad \Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$$

したがって　$\Box \Lambda = \partial_\mu A^\mu$　となるようなΛを選べば，

$$\partial_\mu A'^\mu = 0$$

とできる。逆に，このような条件でゲージ変換されたA^μに対して

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = j^\nu$$

すなわち $\Box A^\mu = j^\mu$ とできる。　$\partial_\mu A^\mu = 0$ を Lorenz gauge条件という。

もちろん Lorenz gaugeでも $\partial_\mu j^\mu = 0$ は満たされる。

真空中の電磁ポテンシャルの解

方程式 $\Box A^\mu = j^\mu$ の真空$(j^\mu = 0)$の解として，例えば

$$A^\mu = \frac{a}{i\omega}\epsilon^\mu \exp(-ik^\nu x_\nu)$$

$k^\mu \equiv \left(\omega, \vec{k}\right)$　　$x^\mu \equiv (t, \vec{x})$　　$\epsilon^\mu \equiv (0, \vec{\epsilon})$：polarization vector

但し $k^2 = \omega^2 - \vec{k}^2 = 0$，$k\epsilon = -\vec{k}\cdot\vec{\epsilon} = 0$，$\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}^* = 1$

$$\partial_\mu \partial^\mu \exp(-ikx) = -k^2 \exp(-ikx) = 0 \qquad \partial_\mu \epsilon^\mu \exp(-ikx) = -ik\epsilon \exp(-ikx) = 0$$

A^μ は$\Box A^\mu = 0$ の解であり，Lorenz gauge 条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ を満たす．

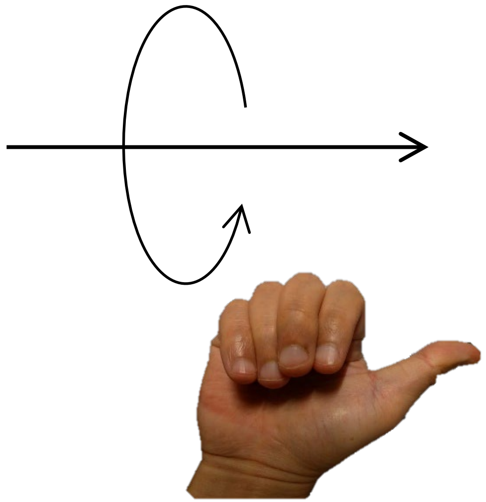
$$\vec{E} = a\vec{\epsilon}\exp(-ikx) \qquad \vec{B} = \frac{a}{\omega}(\vec{k}\times\vec{\epsilon})\exp(-ikx)$$

すなわち polarization vector は，電磁波における電場の振動方向

※ A^μ はローレンツベクトル。ϵ^μ も同じくローレンツベクトルとしての変換性を持つ

円偏光(Right/Left-handed Polarization)

右回り(Right-handed)偏光（光学では左円偏光）



$\vec{k} = (0,0,1), \quad \vec{\epsilon} = (-1,-i,0)/\sqrt{2}$ とすると

$$\vec{E} = a\vec{\epsilon}\exp(-ikx) = \frac{a}{\sqrt{2}}(-\exp(-ikx)\,,-i\exp(-ikx)\,,0)$$

実部のみ取ると

$$\vec{E} = \frac{a}{\sqrt{2}}(-\cos(\omega t - kz)\,,-\sin(\omega t - kz)\,,0)$$

$$\vec{E}(z=0) = -\frac{a}{\sqrt{2}}(\cos(\omega t)\,,\sin(\omega t)\,,0)$$

$+z$の方向からみると，電場は反時計まわりに回転 (spin +1).
右手の法則のように回転しているので right-handed 偏光と呼ばれる

偏極ベクトル(Polarization vector)

$\vec{\epsilon} = (1, -i, 0)/\sqrt{2}$ のときは,

$$\vec{E} = \frac{a}{\sqrt{2}}(\cos(-\omega t + kz), \sin(-\omega t + kz), 0)$$

$$\vec{E}\,(z = 0) = \frac{a}{\sqrt{2}}(\cos(-\omega t), \sin(-\omega t), 0)$$

$+z$の方向からみると，電場は時計まわりに回転 (spin −1，left-handed)

polarization vector は，以下のように spin 1 に対応する

$\vec{\epsilon} = (-1, -i, 0)/\sqrt{2}$ $\quad |J = 1, J_z = +1\rangle$

$\vec{\epsilon} = (0,0,1)$ $\quad |J = 1, J_z = 0\rangle$ ➔ 但し massless photon にはこの偏極はない
gauge 条件の $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$ と矛盾

$\vec{\epsilon} = (1, -i, 0)/\sqrt{2}$ $\quad |J = 1, J_z = -1\rangle$

偏極ベクトル(Polarization vector)

Polarization vector は，spin 1 に対応

➔ z軸周りの回転演算子を考える

$$U_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

回転の生成子を L_z とすると

$$U_z(\theta) = e^{-i\theta L_z}$$

$\theta \to 0$ として

$$U_z(\theta) \to 1 - i\theta L_z = \begin{pmatrix} 1 & -\theta & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $$L_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

偏極ベクトル(Polarization vector)

L_zは，次の固有ベクトルと固有値を与える

$$L_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_z \begin{pmatrix} \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

同様に $U_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $U_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ から，

それぞれ $L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$, $L_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得る。

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{i\,j\,k} L_k \qquad L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = 1 \times (1+1)$$

と確かに spin 1 の演算子になっている

電磁気まとめ

Heaviside-Lorentz 単位系：　$\epsilon_0 = 1$，$\mu_0 = 1$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\eta\right)} = 0$$ （E-L方程式）

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

➔

$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda$　(ゲージ変換)

$\partial_\mu A^\mu = 0$　（Lorenzゲージ）

➔

$$\Box A^\mu = j^\mu$$

偏極ベクトル（スピン１に対応）：$\epsilon^\mu = (0, \vec{\epsilon})$

$\vec{\epsilon} = (-1, -i, 0)/\sqrt{2}$	$\lvert J = 1, J_z = +1\rangle$	Right-handed
$\vec{\epsilon} = (0,0,1)$	$\lvert J = 1, J_z = 0\rangle$	
$\vec{\epsilon} = (1, -i, 0)/\sqrt{2}$	$\lvert J = 1, J_z = -1\rangle$	Left-handed