素粒子物理学

— 準備（電磁気　補足） —

素粒子物理学
0AJC041/01BC098

2025年度春bc

武内勇司

Lorentz 力

ちょっと特殊相対論のおさらい　$x^\mu = (t, \vec{x})$　τ：固有時　$d\tau^2 = dt^2 - d\vec{x}^2$

4元速度　$u^\mu \equiv \dfrac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\dfrac{dt}{d\tau}, \dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{d\vec{x}}{dt}\right) = (\gamma, \gamma\vec{v})$　$\vec{v} \equiv \dfrac{d\vec{x}}{dt}$

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2(1 - v^2) = 1$$

4元運動量　$p^\mu \equiv m_0 u^\mu = (m_0\gamma, m_0\gamma\vec{v}) = (m, m\vec{v}) = (E, \vec{p})$

m_0: 静止質量,
不変質量,
rest mass

$\vec{p} = m\vec{v}$　$m \equiv m_0\gamma$　$p_\mu p^\mu = m_0^2$

4元力　$f^\mu \equiv \dfrac{dp^\mu}{d\tau} = \left(\gamma\vec{f}\cdot\vec{v}, \gamma\vec{f}\right)$　$\vec{f} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

荷電粒子の運動が作る電流　$j^\mu = qu^\mu = (q\gamma, q\gamma\vec{v})$

Lorentz 力

Lorentz 力を相対論形式に記述すると　$f_\mu = F_{\mu\nu} j^\nu$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_\mu &= F_{\mu\nu} j^\nu \\ &= \left(F_{0k} j^k, F_{i0} j^0 + F_{ik} j^k\right) = \left(E_k j^k, -E_i j^0 - \varepsilon_{ikl} B_l j^k\right) \\ &= \left(q\gamma \vec{E} \cdot \vec{v}, -\gamma\left(q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}\right)\right) = \left(\gamma \vec{f} \cdot \vec{v}, -\gamma \vec{f}\right) \end{aligned}$$

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m_0 \gamma \vec{v}$$

したがって $\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

これは，電磁場中を運動する荷電粒子が作る電流と電磁場の相互作用項 $A_\mu j^\mu$ から導出される．

Lorentz 力($A_\mu j^\mu$ から導出)

電磁場中を運動する荷電粒子の集団を考える。

A_μはx^μのみの関数。 j^μは$dx^\mu/d\tau$ の関数。

Lagrangian density: $\mathcal{L} = \mathcal{K} - A_\mu j^\mu$

$\mathcal{K}$: 運動エネルギー項

$$j^\mu = qu^\mu \qquad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

q: charge density in rest frame

Lagrangian density $\mathcal{L}$ を$x^\mu, dx^\mu/d\tau$ の関数として

E-L eqn. $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dx^\mu/d\tau)}\right\} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} = 0$$

$$\mathcal{K} = -\rho\sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}} = -\rho\sqrt{u^\mu u_\mu}$$

ρ: mass density in rest frame

$u_\mu u^\mu = 1$ はここでは使わない。

$$-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u^\mu} = \rho\frac{d}{d\tau}\left(\frac{u_\mu}{\sqrt{u_\nu u^\nu}}\right) = \rho\frac{du_\mu}{d\tau} = f_\mu$$

最後に $u_\mu u^\mu = 1$ を使った。

Lorentz 力($A_\mu j^\mu$ から導出)

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - A_\mu j^\mu = \mathcal{K} - qA_\mu u^\mu$$

ところで　$dA_\mu = \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$　なので　$\dfrac{dA_\mu}{d\tau} = \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu$

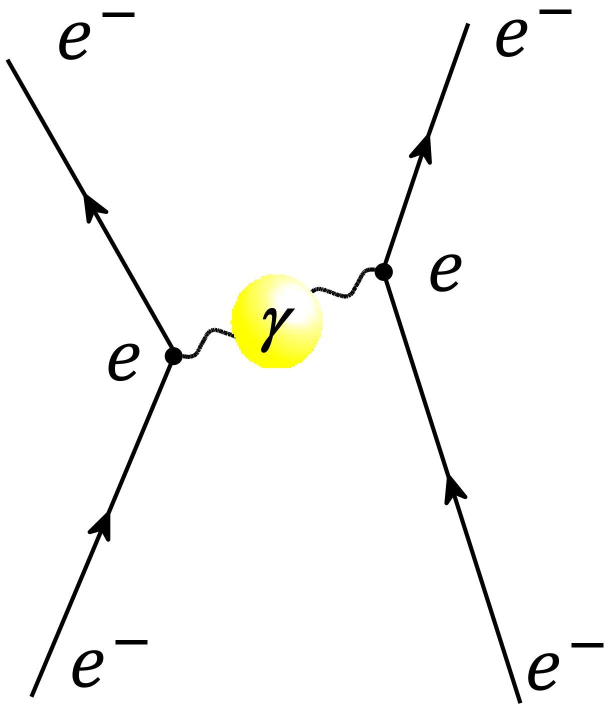
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu}\right) = f_\mu + q\,\frac{dA_\mu}{d\tau} - \left(\partial_\mu A_\nu\right) j^\nu = f_\mu + q\,\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu - \left(\partial_\mu A_\nu\right) j^\nu$$

$$= f_\mu + \left(\partial_\nu A_\mu\right) j^\nu - \left(\partial_\mu A_\nu\right) j^\nu = 0$$

よって $f_\mu = \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) j^\nu = F_{\mu\nu} j^\nu$ を得る.

$j^\mu A_\mu$ という荷電粒子カレントと電磁ポテンシャルの相互作用項は，$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ として電磁場を作る源(Source) であるのと同時に，$f_\mu = F_{\mu\nu} j^\nu$ として荷電粒子に働く力(Force)でもある.

電磁相互作用：電磁場とカレント



素粒子の観点でも，荷電粒子の作るカレント（j^μ）がフォトン（電磁場A_μを量子化した粒子）の源(source)であり，同時に荷電粒子のカレントに働く力(force)である．

$j^\mu A_\mu$ が荷電粒子カレントとフォトンの結合を記述するラグランジアンの項になっている．