素粒子物理学
— 準備 SU(2) 回転群 —

素粒子物理学
0AJC041/01BC098

2025年度春bc

武内勇司

SU(2)回転群

SU(2)回転群： ２次の特殊ユニタリ群（特殊の意味は，行列式が１）

SU(2)に属する行列 u を $u^{\dagger} = u^{-1}, \det u = 1$　とする.

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

$$u^{\dagger} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha^* = \delta \qquad \gamma = -\beta^*$$

ゆえに

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \qquad \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$$, 但し $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

つまり３実数パラメータで記述される

SU(2)回転群

今 $A = e^B$，$\det A = 1$ とする。適当なユニタリー行列 U を選べば
$UBU^\dagger = \Lambda \equiv \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と対角化できるから，

$$UAU^\dagger = Ue^BU^\dagger = U\left(1 + B + \frac{1}{2!}B^2 + \cdots\right)U^\dagger = 1 + UBU^\dagger + \frac{1}{2!}\left(UBU^\dagger\right)^2 + \cdots$$

$$= e^{UBU^\dagger} = e^\Lambda = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}\right)$$

したがって，$\det(UAU^\dagger) = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$

一般に $\det(XY) = \det X \cdot \det Y$ なので，$\det\left(UAU^\dagger\right) = \det A = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = 1$

ゆえに $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$

ところで $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ なので，$\mathrm{Tr}B = \mathrm{Tr}\left(UBU^\dagger\right) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$

結論：$\det A = 1$ なら $\mathrm{Tr}B = 0$

SU(2)回転群

SU(2)に属する行列 u について $u \equiv e^{i\sigma}$ となる σ を定義

$$u^\dagger = e^{-i\sigma^\dagger} = u^{-1} = e^{-i\sigma}$$

したがって $\sigma^\dagger = \sigma$, つまり σ は Hermitian かつ，前ページより $\mathrm{Tr}\,\sigma = 0$

$\theta_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ を定義して，

$$\sigma = \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\,\theta_2 \\ \theta_1 + i\,\theta_2 & -\theta_3 \end{pmatrix} = \theta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \theta_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \theta_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \theta_i \sigma_i$$

↰ $\sum_i \theta_i \sigma_i$

σ_i ：パウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad \{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$$

u（σ）は，3つの実数パラメータ（$\theta_{1,2,3}$）で記述される

スピノル(Spinor)

SU(2)回転群が作用する複素ベクトル空間の元：２成分Spinor

$$\phi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad \xi, \eta \in \mathbb{C}$$

これは，SU(2)変換(回転)で大きさ不変： $\phi \to \phi' = u\phi$

$$\phi'^{\dagger}\phi' = \phi^{\dagger}u^{\dagger}u\phi = \phi^{\dagger}\phi$$

u のもつ3つの自由度は，３つの軸まわりの回転を表している。

$$u(\theta_i) = \exp(-i\theta_i\sigma_i/2) \qquad i = 1,2,3$$

$$u_1(\xi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\xi}{2} & -i\sin\frac{\xi}{2} \\ -i\sin\frac{\xi}{2} & \cos\frac{\xi}{2} \end{pmatrix} \qquad u_2(\eta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\eta}{2} & -\sin\frac{\eta}{2} \\ \sin\frac{\eta}{2} & \cos\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \qquad u_3(\zeta) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\zeta} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\zeta} \end{pmatrix}$$

スピノル(Spinor)

２成分spinor は，４つの実パラメータを持つ：ρ，δ，φ，　θ

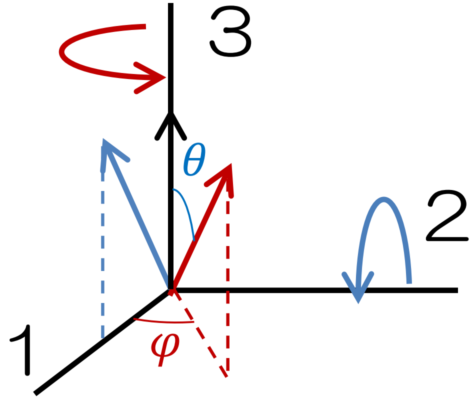
$$\phi = \sqrt{\rho}e^{i\delta/2}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

4実パラメータのうち大きさと全体の位相を除くと2実パラメータの自由度(θ, φ)

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_3(\varphi)u_2(\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$を3-軸の正方向を向くspinorと定義すると,

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$ は(θ,φ)を向くspinorである。



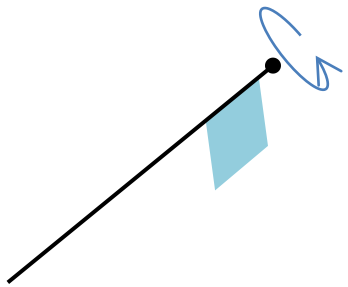
スピノル(Spinor)

2成分spinor [SU(2)] ≅ 3次元ベクトル [SO(3)]

$$\phi = \sqrt{\rho}e^{i\delta/2}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \phi^\dagger\sigma_i\phi = \rho\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

σ_iはパウリ行列

但し，$\varphi = 2\pi$回転すると $\begin{pmatrix} e^{-i\pi}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\pi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ と符号を変える。



$\varphi = 4\pi$回転で元に戻る。

spinorはvector(1階tensor)とは異なる(1/2階tensorと言われることもある)

$S_i \equiv \frac{1}{2}\sigma_i$ をスピン演算子として定義すると

$$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}S_k \qquad S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

スピン1/2の演算子の性質をもつ。

逆を向くspinor（反粒子のspinor）

θ,φを向く spinor $\phi = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ の向きを反転：$\theta \to \pi - \theta$，$\varphi \to \varphi + \pi$

$$\to \begin{pmatrix} e^{-i(\varphi+\pi)/2}\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \\ e^{i(\varphi+\pi)/2}\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\, e^{-i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ i\, e^{i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\times(-i)]{\theta=\varphi=0\text{のとき実数となるように}} \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^* = -i\sigma_2\phi^*$$

$\phi' = u\phi$というSU(2)変換に対してϕ^*は，$(\phi')^* = u^*\phi^*$となり同じ変換には従わないが，$-i\sigma_2\phi^*$はϕと同じ変換性を示す．実は，$-i\sigma_2\phi^*$は ϕと同じ向きの反粒子のスピンに対応する(Dirac方程式の荷電共役変換のところでもう一度…)．

SU(2)変換，2成分spinor まとめ

SU(2)回転群の生成子(Pauli 行列)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

$S(\theta,\varphi) \equiv \hat{r}\cdot\vec{\sigma}/2 = (\sin\theta\cos\varphi\sigma_1 + \sin\theta\sin\varphi\sigma_2/2 + \cos\theta\sigma_3)/2$：$(\theta,\varphi)$方向の spin 演算子

但し　$\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$　　$\hat{r}(\theta,\varphi) \equiv (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

2成分spinor は，大きさ1/2のスピン状態を記述する

$$\phi_\uparrow(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \phi_\downarrow(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$S(\theta,\varphi)\phi_\uparrow(\theta,\varphi) = +\frac{1}{2}\phi_\uparrow(\theta,\varphi) \qquad S(\theta,\varphi)\phi_\downarrow(\theta,\varphi) = -\frac{1}{2}\phi_\downarrow(\theta,\varphi)$$

反粒子の場合

$$\chi_\uparrow(\theta,\varphi) = -i\sigma_2\phi_\uparrow^* = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \chi_\downarrow(\theta,\varphi) = -i\sigma_2\phi_\downarrow^* = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

spinor のオススメ参考文献：aXiv:1312.3824　　https://arxiv.org/abs/1312.3824