素粒子物理学
— 相対論的波動方程式と場の量子化 —

素粒子物理学
0AJC041/01BC098

2025年度春bc

武内勇司

相対論的波動方程式

自由粒子の Schrödinger 方程式(Lorentz 共変ではない)

$$\hat{E}\psi = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}\psi \qquad \hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t} \qquad \hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$$

$$\partial_\mu = \left(\partial_t\,,\vec{\nabla}\right)$$

$$\partial^\mu = \left(\partial_t\,,-\vec{\nabla}\right)$$

相対論的波動方程式

$$p^2 = m^2 \qquad \hat{p}^\mu = i\partial^\mu \qquad (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi = 0$$

Klein-Gordon 方程式

これは，Lorentz 共変な式

この方程式を与える Lagrangian密度 は，　$\mathcal{L} = \partial_\mu\psi^*\partial^\mu\psi - m^2\psi^*\psi$

E-L方程式から

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)} = -m^2\psi^* - \partial_\mu\partial^\mu\psi^* = 0$$

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\psi = 0$$

Klein-Gordon 方程式

$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\psi = 0$　の一般解は，

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\left[a(\vec{p})e^{-ipx} + b^*(\vec{p})e^{ipx}\right] \qquad \text{但し } p^2 = m^2$$

問題点1：
$\psi = Ce^{iEt}$ の項は，ψ を量子力学の波動関数として扱うと，$\hat{E}\psi = -E\psi$ となり負のエネルギー固有状態を与える。
　　⇒ 場の理論では，正のエネルギーを持つ反粒子の状態と解釈される.

問題点2：
量子力学のように $\rho = \int d^3x\, \psi^*\psi$ を確率と解釈すると確率が保存しない。
代わりに，ネーターの定理を使うと，ネーターカレントとして

$$\rho = \int d^3x\; i\left[\psi^*(\partial_t \psi) - (\partial_t \psi^*)\psi\right]$$

が保存量の候補となる。

Klein-Gordon 方程式

ネーターの定理：系に連続的な対称性があると対応する保存量がある

$$J^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_i)} \delta\psi_i$$ ：ネーターカレント

$\delta\psi_i$: 変換に対する微小変位 $(\psi_i \to \psi_i{}' = \psi_i + \delta\psi_i)$

系の対称性としてψの位相変換を考える

$$\psi \to \psi' = e^{-i\alpha}\psi \to (1 - i\alpha)\psi$$

$$\delta\psi = -i\alpha\psi$$
$$\delta\psi^* = i\alpha\psi^*$$

$$J^\mu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)}\delta\psi^*\right] = i\alpha[\psi^* \partial^\mu \psi - (\partial^\mu \psi^*)\,\psi]$$

$$Q \equiv \int d^3x\, J^0 \qquad \frac{dQ}{dt} = 0$$

しかし $Q = \int d^3x\, i[\psi^*(\partial_t\psi) - (\partial_t\psi^*)\psi]$ は，負の値を取り得るので確率とは解釈不能

⇒ 場の理論では，この量は粒子の電荷と解釈される．負の値でも問題ない。

問題点3：

量子力学：$\psi(\vec{x}, t)$は1粒子状態の確率を与える関数。粒子の生成・消滅を扱えない。

フェルミ統計，ボーズ統計性は手で与える必要がある。

場の理論：$\psi(\vec{x}, t)$は場の演算子。粒子の生成・消滅が扱える。統計性は自然に入る。

場の演算子

量子力学の1粒子の波動関数: $\psi(x,t) \Leftrightarrow$ 場の演算子へ：$\psi(x,t) \rightarrow \hat{\psi}(x,t)$

正準量子化：解析力学で正準変数x, pを正準交換関係を満たす演算子$\hat{x}$, $\hat{p}$に置き換え

調和振動での例

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 \qquad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -m\omega^2 x$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad H = p\dot{x} - L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

正準量子化 ➔ x, pに交換関係を設定：$[\hat{x}\,,\hat{p}] = i$

昇降演算子の導入 $\quad \hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p})$ と定義すると $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = 1$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

場の正準量子化

正準量子化の手続きで場の量子化を実行

例　$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi$

共役な正準運動量　$\pi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = \partial_t \psi^*$　　$\pi^* = \partial_t \psi$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left[a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^*(\vec{p}) e^{ipx}\right]$$

$$\pi(x) = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2} \left[a^*(\vec{p}) e^{ipx} - b(\vec{p}) e^{-ipx}\right]$$

$\psi \to \hat{\psi}, \pi \to \hat{\pi}$ として，正準交換関係を導入

(複素共役*は，†に変わる．演算子を示すhat は以降省略)

場の正準量子化

$[\psi(t,\vec{x}),\pi(t,\vec{x}')]=i\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ 同時刻交換関係を設定

$[\psi(t,\vec{x}),\psi(t,\vec{x}')]=[\psi,\psi^\dagger]=[\pi,\pi]=[\pi,\pi^\dagger]=[\psi,\pi^\dagger]=0$

$$\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\left[a(\vec{p})e^{-ipx}+b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right]$$

ψが演算子 ➔ $a(\vec{p})$, $b(\vec{p})$ が演算子

（$2E$というfactor は，単位体積当たりの粒子数が$2E$という規格化から）

$$\left[a(\vec{p}),a^\dagger(\vec{p}')\right]=\left[b(\vec{p}),b^\dagger(\vec{p}')\right]=(2\pi)^3 2E\delta(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$[a,a]=[a,b]=\left[a,b^\dagger\right]=[b,b]=0$$

$a(\vec{p})$, $b(\vec{p})$ の交換関係は，調和振動子の例における昇降演算子に類似

場の生成消滅演算子

量子力学の調和振動の昇降演算子

$\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ ；下降，上昇演算子　　$[\hat{a}\,,\hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$　　$\hat{a}|0\rangle \equiv 0$：基底状態の定義

$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$　　$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$：number operator　　$|n\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle$

ボーズ統計に従う粒子を一つ生成($\hat{a}^\dagger$), 一つ消滅($\hat{a}$)する演算子

場の生成消滅演算子と1粒子状態

$a^\dagger(\vec{p})$ は運動量 $\vec{p}$ をもつ粒子，$b^\dagger(\vec{p})$ は運動量 $\vec{p}$ をもつ反粒子の生成演算子
$a\,(\vec{p})$ は運動量 $\vec{p}$ をもつ粒子，$b\,(\vec{p})$ は運動量 $\vec{p}$ をもつ反粒子の消滅演算子

$$a\,|0\rangle = b\,|0\rangle = 0$$

$|\vec{p}\rangle = a^\dagger(\vec{p})|0\rangle$ ：1粒子状態

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\left[a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right]$$

$$|\vec{x},t\rangle = \psi^\dagger(t,\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\left[a^\dagger(\vec{p})|0\rangle e^{ipx}\right]$$ ：粒子の位置固有状態

Heisenberg描像

$$\langle\vec{x},t|\vec{p}\rangle = \langle 0\left|\psi(t,\vec{x})a^\dagger(\vec{p})\right|0\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E}\langle 0\left|a(\vec{p}')a^\dagger(\vec{p})\right|0\rangle e^{-ip'x}$$

$$= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E}\langle 0\left|(2\pi)^3 2E\delta(\vec{p}-\vec{p}') + a^\dagger(\vec{p}')a(\vec{p})\right|0\rangle e^{-ip'x}$$

$$= \int d^3p'\langle 0|\delta(\vec{p}-\vec{p}')|0\rangle e^{-ip'x} = e^{-ipx} = e^{-iEt+i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$ ：波動関数

２粒子状態

$|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle = a^\dagger(\vec{p}_1)a^\dagger(\vec{p}_2)|0\rangle$ ：２粒子状態

$$|\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}}\psi^\dagger(t, \vec{x}_1)\psi^\dagger(t, \vec{x}_2)|0\rangle$$

$$\left\langle 0\middle|a(\vec{q}_2)a(\vec{q}_1)a^\dagger(\vec{p}_1)a^\dagger(\vec{p}_2)\middle|0\right\rangle = (2\pi)^3 2E_1\delta(\vec{q}_1 - \vec{p}_1)(2\pi)^3 2E_2\delta(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) + (2\pi)^3 2E_1\delta(\vec{q}_2 - \vec{p}_1)(2\pi)^3 2E_2\delta(\vec{q}_1 - \vec{p}_2)$$

$$\langle\vec{x}_1, \vec{x}_2, t|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2!}}\int d^3q_1 \int d^3q_2 \ [\delta(\vec{q}_1 - \vec{p}_1)\delta(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) + \delta(\vec{q}_2 - \vec{p}_1)\delta(\vec{q}_1 - \vec{p}_2)]e^{iq_1x_1}e^{iq_2x_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2!}}\left(e^{i\vec{p}_1\cdot\vec{x}_1}e^{i\vec{p}_2\cdot\vec{x}_2} + e^{i\vec{p}_1\cdot\vec{x}_2}e^{i\vec{p}_2\cdot\vec{x}_1}\right)e^{-i(E_1+E_2)t}$$

ボーズ統計性を持った波動関数（$x_1 \leftrightarrows x_2$で対称）が得られた。

反粒子の生成消滅演算子

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\left[a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right]$$

ψの中に入っている e^{ipx}という因子は，負エネルギー状態のように見えるが，
$p^\mu = (E, \vec{p})$の運動量を持つ粒子が時間を逆行している状態を反粒子と解釈して，
$b^\dagger(\vec{p})$を反粒子の生成演算子とすれば矛盾なくなる。

$|\vec{p}\rangle = b^\dagger(\vec{p})|0\rangle$ ：１反粒子状態

$|\vec{x}, t\rangle = \left\{\psi^\dagger(t, \vec{x})\right\}^\dagger |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\left[b^\dagger(\vec{p})|0\rangle e^{ipx}\right]$ ：反粒子の位置固有状態

$$\langle \vec{x}, t|\vec{p}\rangle = \langle 0|\psi^\dagger(t, \vec{x})b^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E}\langle 0|b(\vec{p}')b^\dagger(\vec{p})|0\rangle e^{-ip'x}$$

$$= \int d^3p' \langle 0|\delta(\vec{p} - \vec{p}')|0\rangle e^{-ip'x} = e^{-ipx} = e^{-iEt + i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

反粒子もちゃんと正のエネルギーを持つ。

H, P, Qの演算子

$$\mathcal{H} = \pi\partial_t\psi + (\partial_t\psi^\dagger)\pi^\dagger - \mathcal{L} = \pi\pi^\dagger + \nabla\psi^\dagger\cdot\nabla\psi + m^2\psi^\dagger\psi$$ ：Hamiltonian密度

$$H = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2}\left[a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})\right] = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2}\left[a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})\right] + \mathrm{const}$$

Hが正の値を取るためには，反交換関係ではうまくいかない。交換関係が必要。
すなわち K-G方程式は，ボゾンを記述。
const は無限大に発散する値であるが定数。真空のエネルギーと考え，以降無視

$$\vec{P} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\vec{p}\left[a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})\right] + \mathrm{const}$$ ：運動量演算子

Energy-momentumテンソル$T^{\mu\nu}$のT^{0i}成分から得られる。

$$[\vec{P}, a^\dagger] = \int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'}\vec{p}' a^\dagger(\vec{p}')\left[a(\vec{p}'), a^\dagger(\vec{p})\right] = \vec{p}a^\dagger(\vec{p})$$

$$\vec{P}\, a^\dagger(\vec{p})|0\rangle = [\vec{P}, a^\dagger]|0\rangle = \vec{p}a^\dagger(\vec{p})|0\rangle$$

すなわち $\vec{P}\,|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle$

$$Q = q\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\left[a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) - b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})\right] - \mathrm{const}$$ ：電荷量演算子

ネーターの定理のところで得た $Q = \int d^3x\, i[\psi^*(\partial_t\psi) - (\partial_t\psi^*)\psi]$ から得られる。

電磁場の量子化 (Lorenz gauge)

複素スカラー場の K-G方程式は，電荷を持つスカラーボソンを記述。
Photon：質量0の実ベクトル場（ベクトルの各成分が実スカラー場）

$\Box A^\mu = 0$　　Lorenz条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{\lambda=\pm} \left[\varepsilon^\mu(\vec{k};\lambda) a_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} + \varepsilon^{\mu *}(\vec{k};\lambda) a_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{ikx}\right]$$

実photon に対して $k^2 = 0,\quad k_\mu \varepsilon^\mu = k_\mu \varepsilon^{\mu *} = 0$

＊量子化の手続きはLorenz条件のため単純ではないが，ここでは踏み込まず，結果のみ提示。

$$\left[a_\lambda(\vec{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\right] = (2\pi)^3 2\omega(-g_{\lambda\lambda'})\delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\left[a_\lambda(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}')\right] = \left[a_\lambda^\dagger(\vec{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\right] = 0$$

$$H = \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda=\pm} a_\lambda^\dagger(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}) + \delta^3(0)\int d^3k\omega$$

偏極ベクトル

$$\varepsilon^\mu(s) = (1,0,0,0)$$
$$\varepsilon^\mu(+) = (0,-1,-i,0)/\sqrt{2}$$
$$\varepsilon^\mu(-) = (0,1,-i,0)/\sqrt{2}$$
$$\varepsilon^\mu(0) = (0,0,0,1)$$

$$\varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon_\mu^*(\rho) = g_{\lambda\rho} \qquad \lambda, \rho = s,+,-,0$$

スカラー場，電磁場まとめ

複素スカラー場： $\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi$　　$(\square + m^2)\psi = 0$

Klein-Gordon方程式

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left[a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right]$$

$$\left[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')\right] = \left[b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')\right] = (2\pi)^3 2E\delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$[a, a] = [a, b] = \left[a, b^\dagger\right] = [b, b] = 0$$

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2} \left[a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p}) \right] + \mathrm{const}$$

電磁場： $\square A^\mu = 0$　　Lorenz条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{\lambda=\pm} \left[\varepsilon^\mu(\vec{k}; \lambda) a_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} + \varepsilon^{\mu *}(\vec{k}; \lambda) a_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right]$$

実光子に対して $k^2 = 0$，　$k_\mu \varepsilon^\mu = k_\mu \varepsilon^{\mu *} = 0$

$$\left[a_\lambda(\vec{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')\right] = (2\pi)^3 2\omega(-g_{\lambda\lambda'})\delta(\vec{k} - \vec{k}')$$　　$$[a, a] = \left[a^\dagger, a^\dagger\right] = 0$$

$\lambda, \lambda' = s, +, -, 0$：偏極