素粒子物理学
— Dirac 方程式 —

素粒子物理学
0AJC041/01BC098

2025年度春bc

武内勇司

Dirac 方程式

$p^\mu p_\mu = m^2$ $\xrightarrow{p^\mu \to i\partial^\mu}$ $i\partial^\mu i\partial_\mu \phi = m^2\phi$

Lorentz 共変な方程式として Klein-Gordon方程式が得られた。しかし時間の２階微分を含む。
時間の1階微分のみの方程式は作れないだろうか？

（Dirac は，K-G方程式で確率が負になるのは方程式が時間の２階微分を含むからだと考えた）

次の方程式を満たすγ^μを仮定して1階微分のみの方程式を作る。

$$\gamma^\mu i\partial_\mu \psi = m\psi$$

両辺に $\gamma^\mu i\partial_\mu$ ➔ $\gamma^\mu i\partial_\mu(\gamma^\nu i\partial_\nu \psi) = \gamma^\mu i\partial_\mu(m\psi) = m^2\psi$ ➔ $\gamma^\mu\gamma^\nu i\partial_\mu i\partial_\nu \psi = m^2\psi$

これがK-G方程式と等価であるためにγ^μに要求される条件は，

任意の2階対称テンソル $\Gamma_{\mu\nu}$（$\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu}$）に対して

$$\sum_{\mu,\nu} \gamma^\mu\gamma^\nu \Gamma_{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}$$

$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ すなわち $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$\{A, B\} \equiv AB + BA$　反交換関係
$\{A, B\} = 0$ のとき，AとBは反可換

γ 行列

$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ を満たすのは，c-数ではあり得ない。

3次元なら，似た関係式で例えば Pauli行列

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$$

となるが，3+1次元は，最小で4x4行列が必要となる。これをγ 行列と呼ぶ。

例えば

$\sigma_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ として，直積空間 ($a_\mu\sigma_\mu \otimes b_\nu\sigma_\nu$の張る空間，$\mu, \nu = 0,1,2,3$)で

$$\gamma^0 \equiv \sigma_0 \otimes \sigma_3 \qquad\qquad \gamma^i \equiv \sigma_i \otimes i\sigma_2$$

とすると，

$$(\gamma^0)^2 = \sigma_0^2 \otimes \sigma_3^2 = \sigma_0 \otimes \sigma_0 \equiv 1$$

$$\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \sigma_0\sigma_i \otimes i\sigma_3\sigma_2 + \sigma_i\sigma_0 \otimes i\sigma_2\sigma_3 = 0$$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \left(\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i\right) \otimes (i\sigma_2)^2 = -2\delta_{ij}$$

となり，$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$を満たすものが作れる。

γ 行列(Dirac表現，Weyl表現)

$\gamma^0 = \sigma_0 \otimes \sigma_3$，$\gamma^i = \sigma_i \otimes i\sigma_2$ を4x4行列で表現すると，

$$\gamma^0 = \sigma_0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \sigma_i \otimes i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

ここの1($= \sigma_0$)は，2x2の単位行列の意味

上記定義でのγ 行列を「Dirac 表示」という。
他にも，例えば Weyl 表示(Chiral 表示)というのもある。

$$\gamma^0 \equiv \sigma_0 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i \equiv \sigma_i \otimes i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\gamma^0)^2 = \sigma_0 \otimes \sigma_0 = 1 \qquad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \sigma_i \otimes i(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1) = 0$$

結局，Diracの方程式は，$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$なる$\gamma$ 行列を導入し，ψを4成分として

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi = 0$$

となる。

ここの m は，正確には mI_4（I_4は4x4の単位行列）

γ 行列の性質

$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ から導かれる γ 行列の性質(表示には依らない)

$$(\gamma^0)^2 = 1 \qquad (\gamma^i)^2 = -1 \qquad i = 1,2,3$$

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \qquad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \qquad \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}$$

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Dirac 表示

γ^5 の役割については，次回以降

$$(\gamma^5)^2 = 1 \qquad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \qquad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}$$

$\not{a} \equiv \gamma_\mu a^\mu$ ：Feynman slash notation

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$$

これら(及び次ページ)の公式は，後に相互作用の確率振幅を求める際，γ 行列のトレース計算に重要。

γ 行列の性質

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = g^{\mu\nu}\gamma^\rho - g^{\mu\rho}\gamma^\nu + g^{\nu\rho}\gamma^\mu - i\gamma^5\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma$$

γ 積のべき数を2減らせる公式

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ： Levi-Civita の反対称テンソル

$\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$ となる notation

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\gamma\delta} = -2\left(g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta} - g^{\rho\delta}g^{\sigma\gamma}\right)$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu) = \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0$$

奇数個の γ 積のトレースは0

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}]$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^5] = \mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu] = \mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu] = \mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho] = 0$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

γ 行列の任意個の積から作られる線形独立量

γ^μの任意個の積から作られる線形独立な量は16個

	独立要素の数
$1(=\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^i)$	1
γ^μ	4
$\gamma^\mu\gamma^\nu\ (\mu \neq \nu)$	6
$\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\ (\propto \gamma^5\gamma^\mu)$	4
$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\ (\propto \gamma^5)$	1

γ 行列を表現するには，複素パラメータ16個が必要。
したがってγ 行列は4x4行列でなければならない。

Dirac方程式を満たす場(Dirac場)のLagrangian

Dirac方程式　　$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\,\psi = 0$

γ 行列が 4x4行列なので ψ は４成分をもつ（Lorentz vector ではない）

Dirac方程式に対応する Lagrangian は,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\overleftrightarrow{\partial}_\mu - m)\psi = \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu\psi) - (i\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right] - m\bar{\psi}\psi$$

但し　$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$,　$\overleftrightarrow{\partial}_\mu \equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu)$

γ^0 は，Lorentz 共変性を持たせるために必要

E-L方程式

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\frac{(\partial\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = \frac{1}{2}\gamma^\mu i\partial_\mu\psi - m\psi + \frac{1}{2}i\partial_\mu(\gamma^\mu\psi) = \gamma^\mu i\partial_\mu\psi - m\psi = 0$$

$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi$　としても大抵の場合支障がないので，以降こちらを使う

４成分Dirac場のLorentz変換性

$x^\mu \to x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ というLorentz 変換に対して４成分Dirac場ψが

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S(a)\psi(x)$$

と変換されるとする。但し S (4x4行列)は,

$$S^{-1}\gamma^\mu S = a^\mu{}_\nu \gamma^\nu \qquad\qquad S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0$$

の条件を満たすとする。すると,

$$\bar{\psi}\psi \to \bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S\psi = \psi^\dagger \gamma^0 S^{-1} S\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi$$ ：Lorentz scalar

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \to \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu S\psi = \psi^\dagger \gamma^0 S^{-1}\gamma^\mu S\psi = a^\mu{}_\nu \bar{\psi}\gamma^\nu\psi$$ ：Lorentz vector

例えば z 方向への β, γ の
Lorentz boost の場合
(Dirac表示)

$$S = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\begin{pmatrix} 1 & \sigma_3 \dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1} \\ \sigma_3 \dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1} & 1 \end{pmatrix}$$

４成分Dirac spinor

自由粒子のDirac方程式の平面波解(運動量固有状態)

$$\psi(x) = u(\vec{p})e^{-ipx} = u(\vec{p})e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}$$ ：粒子

$$\psi(x) = v(\vec{p})e^{ipx}$$ ：反粒子

平面波解のx^μに依存しない部分 $u(\vec{p})$, $v(\vec{p})$ (４成分)を Dirac spinor と呼ぶ。

粒子のDirac spinor を $u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ と記述(ξ, η はそれぞれ２成分spinor)して，

Dirac 方程式（Dirac 表示）を書き下すと，

$$\left(\gamma^\mu i\partial_\mu - m\right)u(\vec{p})e^{-ipx} = \left(\gamma^\mu p_\mu - m\right)u(\vec{p})e^{-ipx}$$

$$= \begin{pmatrix} E-m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} e^{-ipx} = 0$$

これから $\eta = \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\xi$ を得る。

４成分Dirac spinor

平面波の Dirac spinor

$$u(\vec{p}) = N\begin{pmatrix} \phi \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix}：粒子 \qquad v(\vec{p}) = N\begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix}:反粒子 \qquad N = \sqrt{E+m}$$

単位体積当たりの粒子数が
$2E$となる規格化

ϕ, χ は，２成分spinor：粒子（反粒子）のスピン1/2の状態を記述。

粒子・反粒子共にスピン状態が2自由度あるので，Dirac方程式には計4つの独立解

したがってDirac方程式の一般解は，

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{s=1,2} \left[c_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + d_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{ipx} \right]$$

４成分Dirac spinor

$$u = N\begin{pmatrix} \phi \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix} \qquad v = N\begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

粒子は，$\phi = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ が，(θ,φ)方向の↑状態を記述する。

反粒子は，$\chi = -i\sigma_2\begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ が，(θ,φ)の方向の↑状態。

スピンの z 成分固有状態で書くと

$$\phi_\uparrow(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_\downarrow(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \chi_\uparrow(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \chi_\downarrow(z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dirac spinorの公式

$$u_s^\dagger(\vec{p})u_r(\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p})v_r(\vec{p}) = 2E\delta_{sr}$$

$$u_s^\dagger(\vec{p})v_r(-\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p})u_r(-\vec{p}) = 0$$

$$\bar{u}_s(\vec{p})u_r(\vec{p}) = -\bar{v}_s(\vec{p})v_r(\vec{p}) = 2m\delta_{sr}$$

$$\bar{u}_s(\vec{p})v_r(\vec{p}) = \bar{v}_s(\vec{p})u_r(\vec{p}) = 0$$

$$\sum_{s=1,2} u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) = \not{p} + m$$

$$\sum_{s=1,2} v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) = \not{p} - m$$

$\not{a} \equiv \gamma_\mu a^\mu$ Feynman slash notation

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0 \qquad (\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0$$

$$\bar{u}(\vec{p})(\not{p} - m) = 0 \qquad \bar{v}(\vec{p})(\not{p} + m) = 0$$

これらの公式は，後に相互作用の確率振幅を求める際に重要

Dirac方程式まとめ

Dirac方程式　$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi = 0$

γ 行列　$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

Lagrangian density

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi$$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

Dirac表示

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dirac場の一般解　$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{s=1,2} \left[c_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx} + d_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{ipx}\right]$

$u_s(\vec{p}) = N\begin{pmatrix} \phi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\phi_s \end{pmatrix}$：粒子　　$v_s(\vec{p}) = N\begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}$：反粒子　$N = \sqrt{E+m}$

ϕ_s，χ_s は，粒子・反粒子の２成分spinor。Dirac場は spin 1/2 を持つ。

Dirac場Lorentz変換性　$x^\mu \to x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$

$\psi(x) \to \psi'(x') = S(a)\psi(x)$　　$S^{-1}\gamma^\mu S = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu$　　$S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0$

※その他，γ 行列，Dirac spinor の公式集参照