素粒子物理学
— Dirac場の量子化と電磁場との相互作用 —

素粒子物理学
0AJC041/01BC098

2025年度春bc

武内勇司

Dirac場の量子化

$$\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\sum_{s=1,2}\left[c_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx}+d_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{ipx}\right]$$

場の量子化により$c_s(\vec{p})$，　$d_s(\vec{p})$ がDirac粒子・反粒子の消滅演算子となる

$$\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}=i\psi^\dagger \quad \Leftarrow \quad \mathcal{L}=\bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu-m)\psi=\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0 i\partial_t\psi+\bar{\psi}\gamma^i i\partial_i\psi-m\bar{\psi}\psi$$

$$\mathcal{H}=\pi\partial_t\psi-\mathcal{L}=-\bar{\psi}\gamma^i i\partial_i\psi+m\bar{\psi}\psi=\psi^\dagger i\partial_t\psi$$

$$H=\int d^3x\,\psi^\dagger i\partial_t\psi$$

$$=\int\frac{d^3p}{2(2\pi)^3}\sum_s\left[c_s^\dagger(\vec{p})c_s(\vec{p})-d_s(\vec{p})d_s^\dagger(\vec{p})\right]$$

$$=\int\frac{d^3p}{2(2\pi)^3}\sum_s\left[c_s^\dagger(\vec{p})c_s(\vec{p})+d_s^\dagger(\vec{p})d_s(\vec{p})\right]-2\delta^3(0)\int d^3pE$$

エネルギーが正であるためには，
生成消滅演算子には，交換関係ではなく，反交換関係の導入が必要

$$\{A,B\}=AB+BA$$

Dirac場の量子化

Dirac場の正準量子化として，以下を導入

$$\left\{\psi_\alpha(t,\vec{x}),\psi_\beta^\dagger(t,\vec{x}')\right\}=\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

α,β=1～4: 4成分spinorの足

$$\{\psi,\psi\}=\left\{\psi^\dagger,\psi^\dagger\right\}=0$$

Dirac粒子の生成消滅演算子に対しては以下の反交換関係が得られる

$$\left\{c_s(\vec{p}),c_r^\dagger(\vec{p}')\right\}=\left\{d_s(\vec{p}),d_r^\dagger(\vec{p}')\right\}=(2\pi)^3 2E\delta_{sr}\delta(\vec{p}-\vec{p}')$$

$s,r=1,2$
spin index

$$\{c,c\}=\{c,d\}=\left\{c,d^\dagger\right\}=\{d,d\}=0$$

Dirac方程式は，フェルミオンを記述（粒子の交換に対して反対称）

反交換関係を持つ生成消滅演算子

$\hat{c}, \hat{c}^\dagger$：消滅，生成演算子

$$\{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} = \hat{c}\hat{c}^\dagger + \hat{c}^\dagger\hat{c} = 1 \qquad \{\hat{c}, \hat{c}\} = \{\hat{c}^\dagger, \hat{c}^\dagger\} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \hat{c}\hat{c} = \hat{c}^\dagger\hat{c}^\dagger = 0$$

$\hat{c}|0\rangle \equiv 0$：基底状態の定義

個数演算子 $\hat{N} = \hat{c}^\dagger\hat{c}$ $\qquad \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

$$\hat{N}^2 = \hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{c}^\dagger\hat{c} = \hat{c}^\dagger(1 - \hat{c}^\dagger\hat{c})\hat{c} = \hat{c}^\dagger\hat{c} = \hat{N} \qquad \text{i.e.} \quad n = 0 \text{ または } 1$$

反交換関係を持つ生成・消滅演算子による状態は，0個と1個の状態のみ

$\hat{c}^\dagger|0\rangle = |1\rangle$ $\qquad \hat{c}^\dagger|1\rangle = 0$ ← パウリ排他律(同じ状態には２個以上入れない)

$\hat{c}|1\rangle = |0\rangle$ $\qquad \hat{c}|0\rangle = 0$

⇩

フェルミ統計に従う粒子を一つ生成($\hat{c}^\dagger$)，一つ消滅($\hat{c}$)する演算子

Dirac粒子の1粒子状態

$|\vec{p},s\rangle = c_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle$：　運動量 $\vec{p}$, spin s をもつ1粒子状態

$$|\vec{x},t\rangle = \psi^\dagger(t,\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_s \left[c_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle u_s^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}\right]$$ ：粒子の位置固有状態

$$\langle\vec{x},t|\vec{p},s\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E} \sum_r \langle 0|c_r(\vec{p}')c_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle u_r(\vec{p}') e^{-ip'x} = u_s(\vec{p})\, e^{-ipx}$$

$|\vec{p},s\rangle = d_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle$：　運動量 $\vec{p}$, spin s をもつ1反粒子状態

$$|\vec{x},t\rangle = \{\psi^C(t,\vec{x})\}^\dagger|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_s \left[d_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle \{v_s^C(\vec{p})\}^\dagger e^{ipx}\right]$$ ：反粒子の位置固有状態

$$\psi^C = C\bar{\psi}^T = i\gamma^2\psi^*$$ ：Dirac場の荷電共役（後述）

$$\langle\vec{x},t|\vec{p},s\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E} \sum_r \langle 0|d_r(\vec{p}')d_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle v_r^C(\vec{p}') e^{-ip'x} = v_s^C(\vec{p}) e^{-ipx}$$

大域的ゲージ不変性 global gauge invariance

ψ ：何らかの symmetry group に属する演算子の作用する線形空間のベクトル
T_a ：symmetry group の generators

例：　U(1)回転群 $\exp(i\alpha T)$, $T = Y$ (c数の固有値をもつ演算子)
SU(2)回転群 $\exp(i\alpha_a T_a)$, $T_a = \sigma_a/2$ (Pauli 行列)

$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi$　　自由なDirac粒子の系

$\psi \to \psi' = U\psi = \exp(igT_a\alpha_a)\psi$　　$\bar{\psi}' = \bar{\psi}\exp(-igT_a\alpha_a)$　　但しT_a と γ^0 は可換と仮定

という任意の(微小)変換に対して$\mathcal{L}$ は不変。

α_a は, x によらない大域的定数。gはsymmetry group 毎にきまる定数として導入

この変換によるψ の微小変位$\delta\psi$ は,

$$\exp(igT_a\alpha_a) \simeq 1 + igT_a\alpha_a \quad \rightarrow \quad \psi' = \psi + \delta\psi, \quad \delta\psi = igT_a\alpha_a\psi$$

大域的ゲージ不変性とDirac粒子の電荷

Noether's theorem（ネーターの定理）

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) = \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right\}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu(\delta\psi)$$

$$= \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi\right\} = -\alpha_a\partial_\mu(g\bar{\psi}\gamma^\mu T_a\psi) = 0$$

$\partial_\mu J_a^\mu = 0$　但し　$J_a^\mu \equiv g\bar{\psi}\gamma^\mu T_a\psi$

— ネーターの定理 —

系に連続的な対称性が存在すると対応する保存量(ネーターカレント)が存在する.

いま U(1)回転対称を考えて，$T = q$，$g = e$ $(e > 0)$ とする。

$J_a^\mu \equiv ej^\mu$ （ $j^\mu \equiv q\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ ）は，Dirac粒子の電流密度と解釈され，
連続の方程式($\partial_\mu j^\mu = 0$)を満たす(q は e を単位する電荷と解釈)。

$$Q = \int d^3x\, e\, j^0 = qe\int d^3x\,\psi^\dagger\psi = qe\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\sum_s\left[c_s^\dagger(\vec{p})c_s(\vec{p}) + d_s(\vec{p})d_s^\dagger(\vec{p})\right]$$

$$= qe\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\sum_s\left[c_s^\dagger(\vec{p})c_s(\vec{p}) - d_s^\dagger(\vec{p})d_s(\vec{p})\right] + 2qe\delta^3(0)\int d^3p$$

Dirac粒子と電磁場の相互作用

量子力学からの類推：$p^\mu \ \to \ p^\mu - qeA^\mu = i\partial^\mu - qeA^\mu$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(\gamma^\mu i\partial_\mu - m\right)\psi \ \to \ \mathcal{L} = \bar{\psi}\left(\gamma^\mu i\partial_\mu - qe\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi = \bar{\psi}\left(\gamma^\mu i\partial_\mu - m\right)\psi - e\, j^\mu A_\mu$$

光子と荷電Dirac粒子との相互作用ポテンシャルは，$e\, j^\mu A_\mu$ （$j^\mu = q\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$）

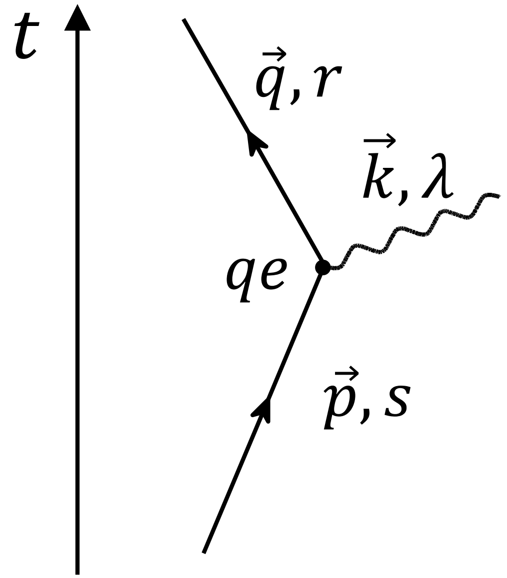
c.f.電磁相互作用を相対論的に記述した際のLagrangian密度のポテンシャル項

fermion （$\vec{p}$, spin s） がphoton （$\vec{k}$, 偏極λ） を放出して，fermion （$\vec{q}$, spin r）になったとする。

initial state: $|\vec{p}, s\rangle \otimes |0\rangle_\gamma = c_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle \otimes |0\rangle_\gamma$

※ $|0\rangle_\gamma$ は，photon系の真空

final state: $|\vec{q}, r\rangle \otimes \left|\vec{k}, \lambda\right\rangle_\gamma = c_r^\dagger(\vec{q})|0\rangle \otimes a_\lambda^\dagger\left(\vec{k}\right)|0\rangle_\gamma$



Dirac粒子と電磁場の相互作用

この相互作用の Amplitude（摂動第１次項）は，

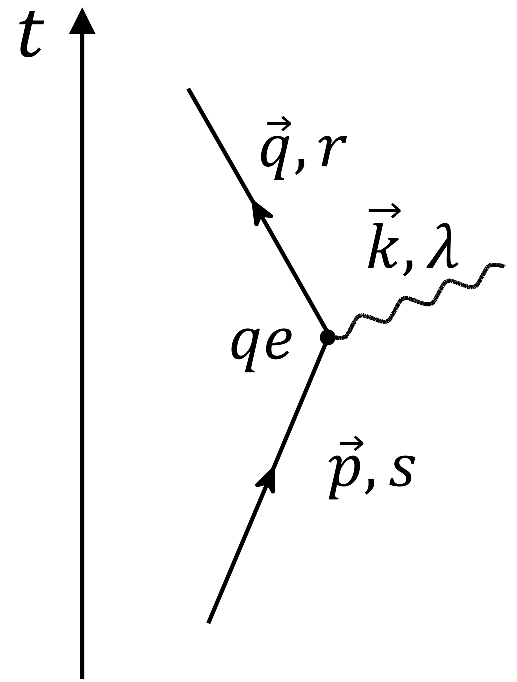
$$\left(\langle\vec{q},r|\otimes\langle\vec{k},\lambda|_{\gamma}\right) ej^{\mu}A_{\mu}\left(|\vec{p},s\rangle\otimes|0\rangle_{\gamma}\right) = qe\langle 0|\underbrace{c_r(\vec{q})\bar{\psi}}\gamma^{\mu}\underbrace{\psi c_s^{\dagger}}(\vec{p})|0\rangle\otimes\langle 0|\underbrace{a_{\lambda}(\vec{k})A_{\mu}}|0\rangle$$

$$= qe\bar{u}_r(\vec{q})\gamma^{\mu}u_s(\vec{p})\varepsilon^{*}_{\mu,\lambda}(\vec{k})e^{i(q+k-p)x}$$

$e^{i(q+k-p)x}$ の因子は，$\vec{x}$ で積分すると $\delta^3(\vec{q}+\vec{k}-\vec{p})$ となり，運動量保存を表している。

Feynman 則
- 反粒子は，時間の向きと逆に矢印を書く
- Incoming fermion: $u(\vec{p},s)$ or $v(\vec{p},s)$
- outgoing fermion: $\bar{u}(\vec{p},s)$ or $\bar{v}(\vec{p},s)$
- Incoming photon: $\varepsilon_{\mu}(\vec{p},\lambda)$
- outgoing photon: $\varepsilon^{*}_{\mu}(\vec{p},\lambda)$
- 頂点に結合の強さ qe および γ^{μ} （電磁相互作用の場合）

のルールで図から答えを書ける。



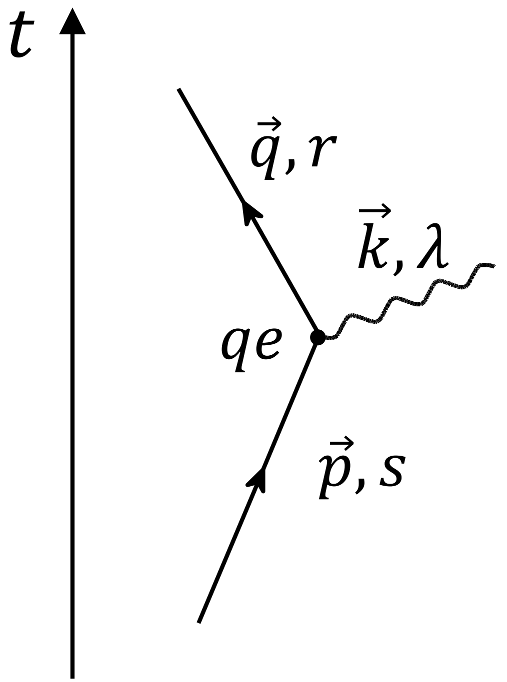
スピン角運動量の保存

fermion が photon を放出，fermion運動量が変化 $(0 \to p\hat{z})$。
スピン z 成分が $+\frac{1}{2}$ から $-\frac{1}{2}$ へと変化 $\left(\phi_s = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \phi_r = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$$\bar{u}_r(p\hat{z})\gamma^\mu u_s(\vec{0})\varepsilon_\mu^* = N^2 \begin{pmatrix} \phi_r \\ \frac{p\sigma_3}{E+m}\phi_r \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0\{\gamma^0, \gamma^i\} \begin{pmatrix} \phi_s \\ 0 \end{pmatrix} \varepsilon_\mu^*$$

$$= (E+m)\left(\phi_r^\dagger \quad \phi_r^\dagger \frac{p\sigma_3}{E+m}\right)\left\{1, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} \phi_s \\ 0 \end{pmatrix}\varepsilon_\mu^*$$

$$= 2p(0,1,i,0)\,\varepsilon_\mu^*$$



Amplitude が 0 にならないためには，

$$\varepsilon^\mu(+) = (0, -1, -i, 0)/\sqrt{2}$$

つまり放出された photon のスピンの z 成分は，$+1$
➔スピン角運動量が保存

Dirac場の量子化と電磁場との相互作用まとめ

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{s=1,2} \left[c_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + d_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{ipx} \right]$$

場の量子化により$c_s(\vec{p})$, $d_s(\vec{p})$ がDirac粒子・反粒子の消滅演算子となる

$$\left\{ c_s(\vec{p}), c_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = \left\{ d_s(\vec{p}), d_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = (2\pi)^3 2E \delta_{sr} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$s, r = 1,2$：spin状態 index

$$\{c, c\} = \{c, d\} = \left\{ c, d^\dagger \right\} = \{d, d\} = 0$$

Dirac場は，Fermi統計性を持つ

エネルギーの演算子 $H = \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3} \sum_s \left[c_s^\dagger(\vec{p}) c_s(\vec{p}) + d_s^\dagger(\vec{p}) d_s(\vec{p}) \right] - \mathrm{const}$

電荷の演算子 $Q = qe \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_s \left[c_s^\dagger(\vec{p}) c_s(\vec{p}) - d_s^\dagger(\vec{p}) d_s(\vec{p}) \right] + \mathrm{const}$

光子と荷電Dirac粒子との相互作用ポテンシャルは，$e\, j^\mu A_\mu$ $(j^\mu = q\, \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$