

素粒子物理学 — ゲージ不変性 —

素粒子物理学
OAJC041/O1BC098

2025年度春bc

武内勇司

ゲージ不変性 Gauge invariance

前回見たように、Dirac場の大域的U(1)変換不変性からDirac場の電流密度、電荷に相当する量が与えられた。

今回は、U(1)に限らず、**SU(2)×U(1)**という枠組みで考える。

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi = \exp(igT^l\alpha^l)\Psi \quad \text{量子数として } T = 1/2 \text{ および } Y \text{ を持つ}$$

T^l : 回転群の生成子 (Ψ の持つ量子数に対応する演算子)

α^l : 回転角

g : (後で出てくるゲージ場との結合の強さを表す) 定数

Ψ は 2 成分

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

SU(2) の場合は、 $T^l = \tau^l/2$ (パウリ行列)

U(1) の場合は、 $T^l = Y$ (hypercharge)

このYは、量子数のYではなくて演算子

$$\hat{Y}\Psi = Y\Psi$$

$$[T^l, T^m] = if_{lmn}T^n \quad f_{lmn} : \text{群の構造定数 (完全反対称)}$$

構造定数は、U(1)にはないが、SU(2)では非可換なので出てくる： $f_{lmn} = \epsilon_{lmn}$

Dirac場の大域的ゲージ不変(global gauge invariance)

Dirac場のLagrangian: $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\Psi$ $\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ $\bar{\Psi} = (\bar{\phi} \quad \bar{\chi})$

運動項は, $SU(2) \times U(1)$ 変換不変

※ $SU(2)$ 変換不変となるには質量項は ϕ と χ が共に質量 m であることが必要だが, 質量項は今は無視する。

大域的ゲージ変換: 回転群 (生成子 T) による角度 α の位相空間の回転

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi = \exp(igT^l \alpha^l) \Psi \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}U^\dagger = \bar{\Psi} \exp(-igT^l \alpha^l)$$

→ 微小回転 $\delta\alpha$ の回転 $\Psi' \simeq (1 + ig T^l \delta\alpha^l) \Psi$ $\delta\Psi = igT^l \Psi \delta\alpha^l$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} \delta\Psi \right\} = -g\partial_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\mu T^l \Psi) \delta\alpha^l = 0$$

したがって $\partial_\mu J_l^\mu = 0$ 但し $J^{l\mu} = \bar{\Psi}\gamma^\mu T^l \Psi$ $Q^l \equiv J^{l0} = \Psi^\dagger T^l \Psi$

ネーターの定理「系に連続的対称性があれば対応する保存則が存在する」
群の生成子 T が「電荷」の演算子

局所ゲージ不変 (Local gauge invariance)

ゲージ変換を考える際、全宇宙の時空において同じ回転角を考えるのは不自然

→ 回転角 α_l を時空の点 x の関数とする (局所ゲージ変換)

このように局所ゲージ変換に対して不変な Lagrangian とは如何なるものか？

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi = \exp\{igT^l \alpha^l(x)\} \Psi \simeq \{1 + igT^l \alpha^l(x)\} \Psi \quad \text{位相の微小変化 } \alpha^l(x) \text{ を考える}$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} U^\dagger = \bar{\Psi} \exp\{-igT^l \alpha^l(x)\} \simeq \bar{\Psi} \{1 - igT^l \alpha^l(x)\}$$

→ 運動項には、時空の微分 ∂_μ が入っているので $\partial_\mu \alpha^l(x)$ のおつりがつく。

$$\partial_\mu \Psi' = \partial_\mu \{1 + igT^l \alpha^l(x)\} \Psi = \{1 + igT^l \alpha^l(x)\} \{\partial_\mu + igT^l (\partial_\mu \alpha^l)\} \Psi$$

したがって

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu i \partial_\mu \Psi \rightarrow \bar{\Psi}' \gamma^\mu i \partial_\mu \Psi' = \bar{\Psi} \gamma^\mu \{i \partial_\mu - gT^l (\partial_\mu \alpha^l)\} \Psi$$

局所ゲージ不変：ベクトル場の導入

→ $\mathcal{L}$ が局所ゲージ変換で不変となるために、ベクトル場 A_μ^l を導入。

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \{ \gamma^\mu (i\partial_\mu - gT^l A_\mu^l) - m \} \Psi = \bar{\Psi} (\gamma^\mu i\partial_\mu - m) \Psi - gJ^{l\mu} A_\mu^l$$
$$J^{l\mu} \equiv \bar{\Psi} \gamma^\mu T^l \Psi$$

すると(微小)ゲージ変換に対して,

$$\begin{aligned} & \bar{\Psi}' \{ \gamma^\mu (i\partial_\mu - gT^l A_\mu'^l) - m \} \Psi' & [T^l, T^m] = if_{lmn} T^n \\ & = \bar{\Psi} [\gamma^\mu \{ i\partial_\mu - gT^l (\partial_\mu \alpha^l) - g(T^l + ig[T^l, T^n] \alpha^n) A_\mu'^l \} - m] \Psi \\ & = \bar{\Psi} [\gamma^\mu \{ i\partial_\mu - gT^l (\partial_\mu \alpha^l) - g(T^l + gf_{lmn} T^m \alpha^n) A_\mu'^l \} - m] \Psi \end{aligned}$$

局所ゲージ不変：ゲージ場のゲージ変換

ここでベクトル場 $A^{l\mu}$ は、局所ゲージ変換において

$$A_{\mu}^l \rightarrow A_{\mu}'^l = A_{\mu}^l - \partial_{\mu}\alpha^l + gf_{lmn}A_{\mu}^m\alpha^n$$

という変換を受けると仮定。

※ 電磁場ではゲージに不定性があり、 $A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\alpha$ と変換しても物理現象は不変であった。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \bar{\Psi} \left[\gamma^{\mu} \left\{ i\partial_{\mu} - gT^l(\partial_{\mu}\alpha^l) - g(T^l + gf_{lmn}T^m\alpha^n)(A_{\mu}^l - \partial_{\mu}\alpha^l + gf_{ljk}A_{\mu}^j\alpha^k) \right\} - m \right] \Psi \\ &= \bar{\Psi} \{ \gamma^{\mu} (i\partial_{\mu} - gT^l A_{\mu}^l) - m \} \Psi = \mathcal{L} \quad \alpha^l \text{の2次以上の項は無視}\end{aligned}$$

ラグランジアンをある回転群に対して局所ゲージ不変にするために、自然にベクトル場 $A^{l\mu}$ および、そのゲージ変換が導入される。
 $A^{l\mu}$ をゲージ場という。

局所ゲージ不変：ゲージ場のLagrangian

ゲージ場のLagrangian は、ゲージ粒子の質量を M とすると、

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} M^2 A^{l\mu} A_{\mu}^l}_{\text{質量}} - \underbrace{\frac{1}{4} A^{l\mu\nu} A_{\mu\nu}^l}_{\text{運動エネルギー}} - \underbrace{g J^{l\mu} A_{\mu}^l}_{\text{相互作用}}$$

ゲージ場の field strength テンソル
但し $A_{\mu\nu}^l \equiv \partial_{\mu} A_{\nu}^l - \partial_{\nu} A_{\mu}^l - g f_{lmn} A_{\mu}^m A_{\nu}^n$
 $J^{l\mu} = \bar{\Psi} \gamma^{\mu} T^l \Psi$: ゲージ変換に対応する Dirac場の電流

Euler-Lagrange方程式を適用すると

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu}^l} - \partial_{\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} A_{\nu}^l)} \right\} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_{\mu} A^{l\mu\nu} - g f_{lmn} A_{\mu}^m A^{n\mu\nu} + M^2 A^{l\nu} = g J^{l\nu}$$

$$\text{U(1)ゲージの場合: } \partial_{\mu} A^{\mu\nu} + M^2 A^{\nu} = \square A^{\nu} - \partial^{\nu} (\partial_{\mu} A^{\mu}) + M^2 A^{\nu} = g J^{\nu}$$

$$\text{左から } \partial_{\nu} \text{ を作用させると } M^2 \partial_{\nu} A^{\nu} = g \partial_{\nu} J^{\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_{\nu} A^{\nu} = 0$$

$$\text{これはベクトル場のK-G方程式} \quad (\square + M^2) A^{\nu} = g J^{\nu} \quad (\text{Proca方程式})$$

局所ゲージ不変：ゲージ場のLagrangian

ゲージ場の field strength(場の強さ) テンソル

$$A_{\mu\nu}^l \equiv \partial_\mu A_\nu^l - \partial_\nu A_\mu^l - gf_{lmn}A_\mu^m A_\nu^n$$

を定義すると、ゲージ場のゲージ変換(位相の微小変位 α)に対して

$$A_\mu^l \rightarrow A'^l_\mu = A_\mu^l - \partial_\mu \alpha^l + gf_{lmn}A_\mu^m \alpha^n \quad \Rightarrow \quad A_{\mu\nu}^l \rightarrow A'^l_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}^l + gf_{lmn}A_{\mu\nu}^m \alpha^n$$

となる。したがって $A^{\mu\nu} A_{\mu\nu}$ は、局所ゲージ不変。

ところが、これらのゲージ場の質量項は局所ゲージ不変にならない。

$$A'^l_\mu A'^{l\mu} = A_\mu^l A^{l\mu} - 2A^{l\mu} \partial_\mu \alpha^l \neq A_\mu^l A^{l\mu}$$

ゲージ粒子が質量を持つ局所ゲージ不変な理論は作れない！？

⇔ 実際には Weak gauge boson W/Z は質量を持つ。

ゲージ不変 まとめ

→局所ゲージ変換で不変であるためには、ゲージ変換に対応するベクトル場 A_μ^l が導入され、微分演算子は共変微分に変更される。

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + igT^l A_\mu^l \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu i\partial_\mu \Psi \rightarrow \bar{\Psi}\gamma^\mu i\mathcal{D}_\mu \Psi = \bar{\Psi}\gamma^\mu (i\partial_\mu - gT^l A_\mu^l)\Psi$$

但しこのベクトル場 A^μ は、局所ゲージ変換において

$$A_\mu^l \rightarrow A'^l_\mu = A_\mu^l - \partial_\mu \alpha^l + gf_{lmn} A_\mu^m \alpha^n \quad [T^l, T^m] = if_{lmn} T^n$$

のような変換性をもつ。

局所ゲージ不変性から、回転群(生成子 T^l)に対応するゲージ場 A_μ^l が自然に要請され、ゲージ変換に対応したDirac場の電流との相互作用項となる。

$$\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = \bar{\Psi}\gamma^\mu (i\partial_\mu - gT^l A_\mu^l)\Psi = \bar{\Psi}\gamma^\mu i\partial_\mu \Psi - gJ^{l\mu} A_\mu^l \quad J^{l\mu} = \bar{\Psi}\gamma^\mu T^l \Psi$$

ゲージ場 A^μ の Lagrangian は、局所ゲージ不変な運動項を持つ。

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \frac{1}{2} M^2 A^{l\mu} A_\mu^l - \frac{1}{4} A^{l\mu\nu} A_{\mu\nu}^l$$

但しゲージ場の質量項は局所ゲージ不変にはならない。

