素粒子物理学
― 電弱統一理論 GWS(EWSB前) ―

素粒子物理学
0AJC041/01BC098

2025年度春bc

武内勇司

標準模型の枠組み

Lagrangian密度は，エルミート，ローレンツ不変かつ局所ゲージ不変（ゲージ原理）
- ゲージ場は質量を持てない。
- Fermion場も弱アイソスピン二重項だと質量が個別には入れられない。

➔ ゲージ場，Fermion場は，ゲージ原理では質量0とする。

Fermion場(Dirac場)
- 弱アイソスピン T と超電荷(hypercharge) Y という量子数をもっている（これらの量子数は回転群の生成子に対応）
- Lカイラリティは，弱アイソスピンT=1/2 をもつ。
  Rカイラリティは，T=0！
  massless なので，LカイラリティとRカイラリティの場はそもそも独立
- 弱アイソスピンとハイパーチャージ$SU(2)_L \times U(1)$の群による変換性
  - Lカイラリティは， $SU(2) \times U(1)$
  - Rカイラリティは， $U(1)$

Fermion 場: $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Lepton 3世代, Quark 3世代　　$j = 1 \sim 3$

$$L_L^j \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix}^j \qquad \nu_R^j \qquad \ell_R^j$$

$$Q_L^j \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}^j \qquad u_R^j \qquad d_R^j$$

	T	T^3	Y
$\begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix}$	1/2	1/2 -1/2	-1
ν_R	0	0	0
ℓ_R	0	0	-2

Lepton

	T	T^3	Y
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	1/2	1/2 -1/2	1/3
u_R	0	0	4/3
d_R	0	0	-2/3

Quark

同じ粒子の違うカイラリティー状態(LとR)でT,Yの量子数が異なる！

何故LとRで，このように違う構造なのか？ ←標準模型の枠組みでは説明は与えられない。

パリティ変換でL/Rカイラリティは入れ替わる。標準模型は前提としてパリティ非対称性を内包する。

ゲージ変換

$$\Psi \to \Psi' = U\Psi = \exp\left(igT^l\alpha^l\right)\Psi$$

T^l: 回転群の生成子（量子数に対応する演算子）
α^l: 回転角
g: （後で出てくるゲージ場との結合の強さを表す）群ごとに与えられる定数

SU(2)の場合は，　$T^l = \dfrac{\tau^l}{2}$　(パウリ行列： τ^1, τ^2, τ^3)

U(1)の場合は，　$T^l = \dfrac{Y}{2}$　(超電荷 hypercharge)

※ Y/2は，後で計算が楽になるようにするため

$[T^l, T^m] = if_{lmn}T^n$　　　f_{lmn}：　群の構造定数

構造定数は，U(1)では生成子が可換なので0だがSU(2)では非可換：ϵ_{lmn}

SU(2)$_L$×U(1)局所ゲージ不変

局所ゲージ不変を要請すると，ベクトル場(ゲージ場)，及びFermion場とそのベクトル場との相互作用が自然に導入される。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Fermion}} = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\Psi_L}}{2} B_\mu - g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a \right) \Psi_L$$

$$+ \bar{\phi}_R \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\phi_R}}{2} B_\mu \right) \phi_R + \bar{\chi}_R \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\chi_R}}{2} B_\mu \right) \chi_R$$

$\Psi_L \equiv \begin{pmatrix} \phi_L \\ \chi_L \end{pmatrix}$：弱アイソスピン二重項　　　ϕ_R，χ_R：一重項

U(1)：　生成子 Y，　ゲージ場 B_μ，　結合定数 g'

SU(2)：生成子 $\frac{\tau^l}{2}$，　ゲージ場 A_μ^l，　結合定数 g

Fermion場とゲージ場の相互作用が入った。
しかし，このFermion場には，まだ質量項がないことに注意！

SU(2)$_L$×U(1)局所ゲージ不変

ベクトル場(ゲージ場)のエネルギー運動項も追加。

SU(2)は非可換群。エネルギー運動量テンソルにはおつりが付く。

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^l - \partial_\nu A_\mu^l - g\epsilon_{lmn} A_\mu^m A_\nu^n\right)^2$$

非可換群のゲージ場には，ゲージ場同士の相互作用が入る.

これも以下のSU(2)$_L$×U(1)ゲージ変換で不変

$$B_\mu \to B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \beta \qquad A_\mu^l \to A'^l_\mu = A_\mu^l - \partial_\mu \alpha^l + g f_{lmn} A_\mu^m \alpha^n$$

ところが，これらのベクトル場の質量項は不変ではない。

$$B_\mu B^\mu \neq B'_\mu B'^\mu \qquad A_\mu^l A^{l\mu} \neq A'^l_\mu A'^{l\mu}$$

ゲージ不変のためには，ゲージ場の質量項はあってはならない。

Higgs場(複素スカラー場)

ゲージ場の質量問題を解決するために，以下のHiggs(複素スカラー)場を導入。

- T, Yの量子数を持つ [SU(2)×U(1)回転群による変換性を持つ]
- 4つの実スカラーの自由度

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\tau^l}{2}\chi^l} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$\chi^l, v \in \Re$
$l = 1 \sim 3$

	T	T^3	Y
$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	1/2	1/2 -1/2	1

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \left|i\mathcal{D}_\mu \Phi\right|^2 + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2}\left(\Phi^\dagger \Phi\right)^2$$

$$= \left|\left(i\partial_\mu - g'\frac{Y_{\mathrm{H}}}{2}B_\mu - g\frac{\tau^a}{2}A_\mu^a\right)\Phi\right|^2 + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2}\left(\Phi^\dagger \Phi\right)^2$$

- スカラー場 ➔ カイラリティーの区別なし。
- 運動項，及び $\Phi^\dagger\Phi$ は，SU(2)xU(1)回転対称。
- 自己エネルギー項を4乗項まで仮定 $\quad V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda}{2}\left(\Phi^\dagger \Phi\right)^2$

μ^2, λ はポテンシャルの形を決めるパラメータ

湯川結合項

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \chi_L \end{pmatrix}, \phi_R, \chi_R$$

Fermion場とHiggs場との相互作用も Lagrangian に追加

例えば，Lepton（$Y(\nu_R) = 0,\ Y(\ell_R) = -2$）の場合　　　Quark の場合も同様

Ψ_L（T=1/2, Y=−1）
Φ　（T=1/2, Y=1）　　ならば
χ_R（T=0, Y=−2）

$\bar{\Psi}_L \Phi \chi_R$（T=0, Y=0）

➔ SU(2)$_L$×U(1)ゲージ不変

ϕ_R（T=0, Y=0）に対しては，

$\tilde{\Phi} \equiv i\tau^2 \Phi^*$（T=1/2, Y=−1）

を定義し，Y荷を反転すると

$\bar{\Psi}_L \tilde{\Phi} \phi_R$（T=0, Y=0）

➔ SU(2)$_L$×U(1)ゲージ不変

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} = -y_\chi \bar{\Psi}_L \Phi \chi_R - y_\phi \bar{\Psi}_L \tilde{\Phi} \phi_R + \mathrm{h.c.}$$

➔ SU(2)$_L$×U(1) 不変，エルミート

$y_\chi,\ y_\phi$ は，Fermion 場と Higgs場との結合定数（任意の複素数）

湯川結合行列(1)

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \chi_L \end{pmatrix}, \phi_R, \chi_R$$

Quark と Lepton は3世代なので，世代を表すindexをつける。　$j = 1\sim 3$

$$\Psi_L \to \Psi_L^j \qquad \phi_R \to \phi_R^j \qquad \chi_R \to \chi_R^j$$

Fermion 場のHiggs場との結合項は，異なる世代間の結合も許す。
（禁止する理由は特にない）

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} = -\left(\overline{\Psi}_L^j \Phi\right) Y_\chi^{jk} \chi_R^k - \left(\overline{\Psi}_L^j \widetilde{\Phi}\right) Y_\phi^{jk} \phi_R^k + \mathrm{h.c.}$$

任意の複素行列Yは“bi-unitary変換 $V_L Y V_R^\dagger$”で非負(実数)の対角成分に対角化可能

※V_L, V_R は一般には異なるユニタリー行列

$$V_{\chi L} Y_\chi V_{\chi R}^\dagger = \mathrm{diag}\left(y_\chi^j\right) = \begin{pmatrix} y_\chi^1 & & \\ & y_\chi^2 & \\ & & y_\chi^3 \end{pmatrix} \qquad y_\chi^j \geq 0$$

$$V_{\phi L} Y_\phi V_{\phi R}^\dagger = \mathrm{diag}\left(y_\phi^j\right) \qquad y_\phi^j \geq 0$$

湯川結合行列(2)

$$V_{\chi L} Y_\chi V_{\chi R}^\dagger = \mathrm{diag}(y_\chi^j)$$

$$V_{\phi L} Y_\phi V_{\phi R}^\dagger = \mathrm{diag}\left(y_\phi^j\right)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} &= -(\bar{\Psi}_L^j \Phi) Y_\chi^{jk} \chi_R^k - (\bar{\Psi}_L^j \tilde{\Phi}) Y_\phi^{jk} \phi_R^k + \mathrm{h.c.} \\ &= -(\bar{\Psi}_L^j \Phi)\left(V_{\chi L}^\dagger V_{\chi L} Y_\chi V_{\chi R}^\dagger V_{\chi R}\right)^{jk} \chi_R^k - (\bar{\Psi}_L^j \tilde{\Phi})\left(V_{\phi L}^\dagger V_{\phi L} Y_\phi V_{\phi R}^\dagger V_{\phi R}\right)^{jk} \phi_R^k + \mathrm{h.c.} \\ &= -y_\chi^j (\bar{\Psi}_L V_{\chi L}^\dagger)^j \Phi (V_{\chi R} \chi_R)^j - y_\phi^j \left(\bar{\Psi}_L V_{\phi L}^\dagger\right)^j \tilde{\Phi} (V_{\phi R} \phi_R)^j + \mathrm{h.c.}\end{aligned}$$

$$(V_{\chi L})^{jk} \Psi_L^k \to \Psi_L^j$$

$$(V_{\chi R})^{jk} \chi_R^k \to \chi_R^j$$

$V_\chi \Psi_L$，$V_\chi \chi_R$（Leptonの場合）によって世代を再定義。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} = -y_\chi^j \bar{\Psi}_L^j \Phi \chi_R^j - y_\phi^j (\bar{\Psi}_L U_\phi)^j \tilde{\Phi} \phi_R^j + \mathrm{h.c.}$$

Quarkの場合は，$V_{\phi L} \Psi_L$，$V_{\phi L} \phi_R$によって世代を再定義

ここで，$V_{\chi L} V_{\phi L}^\dagger \equiv U_\phi$と定義(ユニタリ行列)

この行列は Lepton だとPMNS行列，Quark だとCKM行列と呼ばれる。

Fermion 場の運動エネルギー項は，例えば $\Psi^j \to \Psi'^j = V^{jk} \Psi^k$ としても

$$\sum_j \bar{\Psi}_L^j \gamma^\mu i \mathcal{D}_\mu \Psi_{\mathrm{L}}^j = \sum_j \bar{\Psi}_L'^j \gamma^\mu i \mathcal{D}_\mu \Psi_{\mathrm{L}}'^j$$

であり，不変なので世代の再定義に影響されない。

ここまでのまとめ: Fermion場，Higgs場

- 以下のような(T, Y)の量子数をもつLepton/Quark それぞれ3世代のFermion場
- T=1/2，Y=1をもつ複素スカラーのHiggs場

$j = 1 \sim 3$

Lepton

$$L_L^j \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix}^j \qquad \nu_R^j \qquad \ell_R^j$$

	T	T^3	Y
$\begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix}$	1/2	1/2 -1/2	-1
ν_R	0	0	0
ℓ_R	0	0	-2

Quark

$$Q_L^j \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}^j \qquad u_R^j \qquad d_R^j$$

	T	T^3	Y
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	1/2	1/2 -1/2	1/3
u_R	0	0	4/3
d_R	0	0	-2/3

Higgs

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\Phi} \equiv i\tau^2 \Phi^*$$

	T	T^3	Y
$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	1/2	1/2 -1/2	1

ここまでのまとめ: SU(2)$_L$×U(1)局所ゲージ不変

ラグランジアンがSU(2)×U(1)局所ゲージ不変性を満たすようにゲージ場が導入され，ゲージ場とFermion場・Higgs場との相互作用が決まる。

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \left|\left(i\partial_\mu - g'\frac{1}{2}Y_H B_\mu - g\frac{\tau^l}{2}A_\mu^l\right)\Phi\right|^2 + \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \frac{\lambda}{2}\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2$$

$$\mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{kin}} = \bar{L}_L^j\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - g'\frac{Y_{\ell L}}{2}B_\mu - g\frac{\tau^l}{2}A_\mu^l\right)L_L^j + \bar{\ell}_R^j\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - g'\frac{Y_{\ell R}}{2}B_\mu\right)\ell_R^j + \bar{\nu}_R^j\gamma^\mu i\partial_\mu\nu_R^j$$

$$\mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{kin}} = \bar{Q}_L^j\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - g'\frac{Y_{QL}}{2}B_\mu - g\frac{\tau^l}{2}A_\mu^l\right)Q_L^j$$
$$+\bar{u}_R^j\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - g'\frac{Y_{uR}}{2}B_\mu\right)u_R^j + \bar{d}_R^j\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - g'\frac{Y_{dR}}{2}B_\mu\right)d_R^j$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^l - \partial_\nu A_\mu^l - g\epsilon_{lmn}A_\mu^m A_\nu^n\right)^2$$

ここまでのまとめ：湯川結合項（Fermion場とHiggs場の相互作用）

Higgs場とFermion場(L/Rカイラリティ)との結合でゲージ不変を満たす項を導入

$$\mathcal{L}_{\text{lepton}}^{\text{Yukawa}} = -\left(\bar{L}'^{j}_{L}\Phi\right)Y_{\ell}^{jk}\ell'^{k}_{R} - \left(\bar{L}'^{j}_{L}\tilde{\Phi}\right)Y_{\nu}^{jk}\nu'^{k}_{R} + \text{h.c.}$$
$$= -y_{\ell}^{j}\left(\bar{L}^{j}_{L}\Phi\right)\ell^{j}_{R} - y_{\nu}^{j}\left[(\bar{L}_{L}U_{\nu})^{j}\tilde{\Phi}\right]\left(U_{\nu}^{\dagger}\nu_{R}\right)^{j} + \text{h.c.}$$

$$V_{\nu L}Y_{\nu}V_{\nu R}^{\dagger} \equiv \text{diag}\left(y_{\nu}^{j}\right)$$
$$V_{\ell L}Y_{\ell}V_{\ell R}^{\dagger} \equiv \text{diag}\left(y_{\ell}^{j}\right)$$

down-type leptonの湯川結合行列が対角化されるように世代を再定義

$$L^{j}_{L} \equiv V_{\ell L}^{jk}L'^{k}_{L} \qquad \ell^{j}_{R} \equiv V_{\ell R}^{jk}\ell'^{k}_{R} \qquad \nu^{j}_{R} \equiv (U_{\nu}V_{\ell R})^{jk}\nu'^{k}_{R}$$

$V_{\ell L}V_{\nu L}^{\dagger} \equiv U_{\nu}$ （U_{ν}: PMNS matrix）　up-type lepton(ν_e, ν_μ, ν_τ)は混合する

$$\mathcal{L}_{\text{quark}}^{\text{Yukawa}} = -\left(\bar{Q}'^{j}_{L}\Phi\right)Y_{d}^{jk}d'^{k}_{R} - \left(\bar{Q}'^{j}_{L}\tilde{\Phi}\right)Y_{u}^{jk}u'^{k}_{R} + \text{h.c.}$$
$$= -y_{d}^{j}\left[\left(\bar{Q}^{j}_{L}U_{d}\right)^{j}\Phi\right]d^{j}_{R} - y_{u}^{j}\left(\bar{Q}^{j}_{L}\tilde{\Phi}\right)u^{j}_{R} + \text{h.c.}$$

$$V_{uL}Y_{u}V_{uR}^{\dagger} \equiv \text{diag}\left(y_{u}^{j}\right)$$
$$V_{dL}Y_{d}V_{dR}^{\dagger} \equiv \text{diag}\left(y_{d}^{j}\right)$$

up-type quarkの湯川結合行列が対角化されるように世代を再定義

$$Q^{j}_{L} \equiv V_{uL}^{jk}Q'^{k}_{L} \qquad u^{j}_{R} \equiv V_{uR}^{jk}u'^{k}_{R} \qquad d^{j}_{R} \equiv (U_{d}V_{uR})^{jk}d'^{k}_{R}$$

$V_{uL}V_{dL}^{\dagger} \equiv U_{d}$ （U_{d}: CKM matrix）　down-type quark (d, s, b)は混合する