

素粒子物理学

— 散乱行列 S-matrix —

素粒子物理学
OAJC041/O1BC098

2025年度春bc
武内勇司

摂動論：時間発展演算子

ハミルトニアン H_0 の固有状態 $|n\rangle$, エネルギー固有値 E_n , および時間発展演算子

$$H_0|n\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle \qquad |n,t\rangle = U_0(t,t_0)|n,t_0\rangle = e^{-iE_n(t-t_0)}|n,t_0\rangle$$

摂動ポテンシャル V が与えられた場合の時間発展 $U(t,t_0)$ を考える。

$$(H_0 + V)|\psi\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle \qquad |\psi,t\rangle = U(t,t_0)|\psi,t_0\rangle$$

$U(t,t_0)$ についての積分方程式

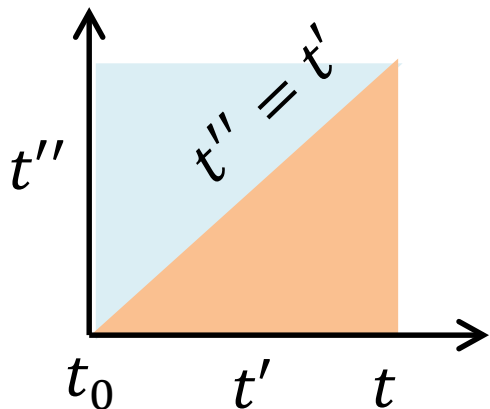
$$U(t,t_0) = U_0(t,t_0) - i \int_{t_0}^t dt' U_0(t,t') V(t') U(t',t_0)$$

逐次展開 $U(t,t_0) = U_0(t,t_0) + U^{(1)}(t,t_0) + U^{(2)}(t,t_0) + \dots$

摂動論：時間順序積

$$U^{(1)}(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t dt' U_0(t, t') V(t') U_0(t', t_0)$$

$$U^{(2)}(t, t_0) = (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' U_0(t, t') V(t') U_0(t', t'') V(t'') U_0(t'', t_0)$$



積分順序の入れ換え

$$t_0 < t' < t, t_0 < t'' < t' \rightarrow t_0 < t'' < t, t'' < t' < t$$

積分変数入れ換え $t' \leftrightarrow t''$

$$= (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t'}^t dt'' U_0(t, t'') V(t'') U_0(t'', t') V(t') U(t', t_0)$$

$$= \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' \mathcal{T} [U_0(t, t') V(t') U_0(t', t'') V(t'') U(t'', t_0)]$$

$\mathcal{T}$ は, time-ordering product (時間順序積 $t' < t''$ なら $t' \leftrightarrow t''$)

摂動論：S行列

適当な時刻を基準に（例えば $t = 0$ を基準とするが実際は何でもよい）

$$U_0(t) \equiv U_0(t, 0) = e^{-iH_0 t}$$

を定義すると、 $U_0(t_1, t_2) \equiv U_0(t_1)U_0^\dagger(t_2)$ 等と書ける。すると

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= U_0(t, t_0) + U^{(1)}(t, t_0) + U^{(2)}(t, t_0) + \dots \\ &= U_0(t) \textcolor{red}{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' U_0^\dagger(t') V(t') U_0(t') \right] U_0^\dagger(t_0) \end{aligned}$$

$$V(t') = - \int d^3 x' \mathcal{L}_{\text{int}}(x') \text{を代入して}$$

散乱行列 (S-matrix) は、以下のように定義される(無次元量)

$$S \equiv U(\infty, -\infty) = U_0(\infty) \textcolor{red}{T} \exp \left[i \int d^4 x' U_0^\dagger(t') \mathcal{L}_{\text{int}}(x') U_0(t') \right] U_0^\dagger(-\infty)$$

散乱行列要素

$$T_{fi} \equiv \langle f, \infty | S | i, -\infty \rangle = \left\langle f \left| \mathcal{T} \exp \left[i \int d^4 x' U_0^\dagger(t') \mathcal{L}_{\text{int}}(x') U_0(t') \right] \right| i \right\rangle$$

※ 時刻指定なしの状態notation $|n\rangle \equiv |n, 0\rangle = U(0, t)|n, t\rangle = U_0^\dagger(t)|n, t\rangle = e^{iE_n t}|n, t\rangle$

$$T_{fi}^{(0)} = \langle f | i \rangle = \delta_{fi}$$

$$T_{fi}^{(1)} = \left\langle f \left| i \int d^4 x' U_0^\dagger(t') \mathcal{L}_{\text{int}}(x') U_0(t') \right| i \right\rangle = i \int d^4 x' \langle f, t' | \mathcal{L}_{\text{int}}(x') | i, t' \rangle$$

$$\equiv -i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi}^{(1)}$$

$\mathcal{M}_{fi}$: 不変振幅

散乱行列要素（1次の摂動具体例： $t \rightarrow W^+ b$ ）

例: top quark の崩壊 $t(p; s) \rightarrow b(q; r) + W^+(k; \lambda)$ s, r, λ スピン状態

自由 W ボゾン場

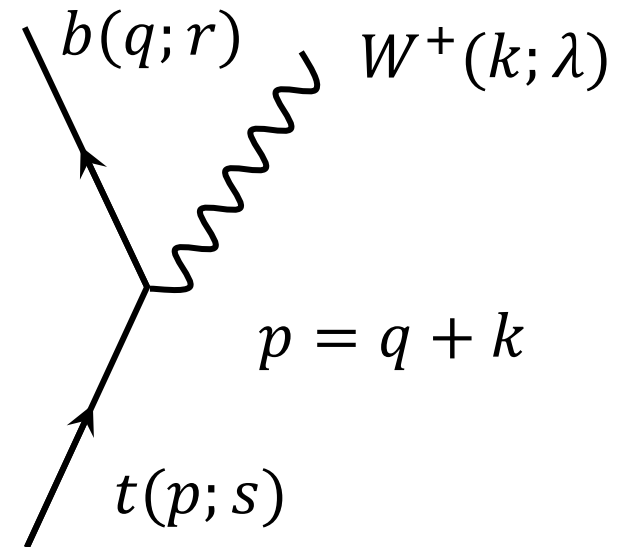
$(\square + m_W^2)W^\mu = 0$: 質量があるとゲージは, $\partial_\mu W^\mu = 0$ によって固定

$$W^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_{\lambda} [\varepsilon^\mu(k; \lambda) \underset{\text{W}^+ \text{の消滅演算子}}{a_\lambda(\vec{k})} e^{-ikx} + \varepsilon^{\mu*}(k; \lambda) \underset{\text{W}^- \text{の生成演算子}}{b_\lambda^\dagger(\vec{k})} e^{ikx}] \quad E = \sqrt{m_W^2 + \vec{k}^2}$$

偏極状態は, $\lambda = +, -, 0$ の3つ

initial state: $|i\rangle = c_t^\dagger(p; s)|0\rangle \otimes |0\rangle_W$

final state: $|f\rangle = c_b^\dagger(q; r)|0\rangle \otimes a_W^\dagger(k; \lambda)|0\rangle_W$



散乱行列要素（1次の摂動具体例： $t \rightarrow W^+ b$ ）

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} J^\mu W_\mu^\dagger = -\frac{g}{\sqrt{2}} U_{tb}^* \bar{b} \gamma^\mu P_L t W_\mu^\dagger$$

b を質量固有状態の b-quark の場とすると
flavor 固有状態は, U_{tb} が掛かる

$$\langle f, t' | \mathcal{L}_{\text{int}}(x') | i, t' \rangle \Rightarrow \langle 0, t' | \underbrace{c_b(q)}_{\text{red}} \bar{b} \gamma^\mu P_L \underbrace{t c_t^\dagger(p)}_{\text{green}} | 0, t' \rangle \otimes \langle 0, t' | \underbrace{a_W(k) W_\mu^\dagger}_{\text{blue}} | 0, t' \rangle$$

$\langle 0 |, | 0 \rangle$ で挟んで消えずに残るのは, $c(p) c^\dagger(p)$ の順番になる項だけ

$$\langle 0 | c(p) c^\dagger(p) | 0 \rangle = \langle 0 | 2E \delta^3(0) - c^\dagger(p) c(p) | 0 \rangle = 2E \delta^3(0)$$

$$\begin{aligned} T_{fi}^{(1)} &= -i \frac{g}{\sqrt{2}} U_{tb}^* \int d^4 x' \bar{u}_b(q, r) e^{iqx'} \gamma^\mu P_L u_t(p, s) e^{-ipx'} \varepsilon_\mu^*(k, \lambda) e^{ikx'} \\ &= -i (2\pi)^4 \delta^4(q + k - p) \frac{g}{\sqrt{2}} U_{tb}^* \bar{u}_b(q, r) \gamma^\mu P_L u_t(p, s) \varepsilon_\mu^*(k, \lambda) \end{aligned}$$

$$-i \mathcal{M}_{fi}^{(1)} = U_{tb}^* \bar{u}_b(q, r) \left(-i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L \right) u_t(p, s) \varepsilon_\mu^*(k, \lambda)$$

消えずに残る項の位相 e^{-ipx} を除いた spinor や偏極ベクトルの分が $\mathcal{M}_{fi}$
位相部分は, 最終的には $(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)$ となってエネルギー運動量保存となる.

散乱行列要素（2次の摂動）

$$\begin{aligned} T_{fi}^{(2)} &= \frac{i^2}{2!} \int d^4x' \int d^4x'' \mathcal{T}[\langle f, t' | \mathcal{L}_{\text{int}}(x') U_0(t') U_0^\dagger(t'') \mathcal{L}_{\text{int}}(x'') | i, t'' \rangle] \\ &\quad \swarrow \sum_n |n\rangle \langle n| = 1 \text{ を挿入} \\ &= \frac{i^2}{2!} \int d^4x' \int d^4x'' \sum_n \mathcal{T}[\langle f, t' | \mathcal{L}_{\text{int}}(x') | n, t' \rangle \langle n, t'' | \mathcal{L}_{\text{int}}(x'') | i, t'' \rangle] \\ &\equiv -i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi}^{(2)} \end{aligned}$$

中間状態には、可能なあらゆる運動量・スピン状態の物理的粒子（on-shell）を考える。

頂点で運動量・エネルギー保存を適用すると、中間状態の4元運動量は、実は on-shell 条件を満たさない。これは「中間状態では、off-shell 粒子が飛ぶ」としばしば表現されるが、正確ではない。「中間状態では系のエネルギーが（量子論的に）一時的に保存していなくてもよい」として、中間状態の粒子は on-shell にある、という解釈がより正しい。

散乱行列要素（2次の摂動具体例： $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$ ）

例: muon decay $\mu^-(p) \rightarrow \nu_\mu(p') + e^-(q) + \bar{\nu}_e(q')$ スピン状態の index は略

initial state: $c_\mu^\dagger(p)|0\rangle$

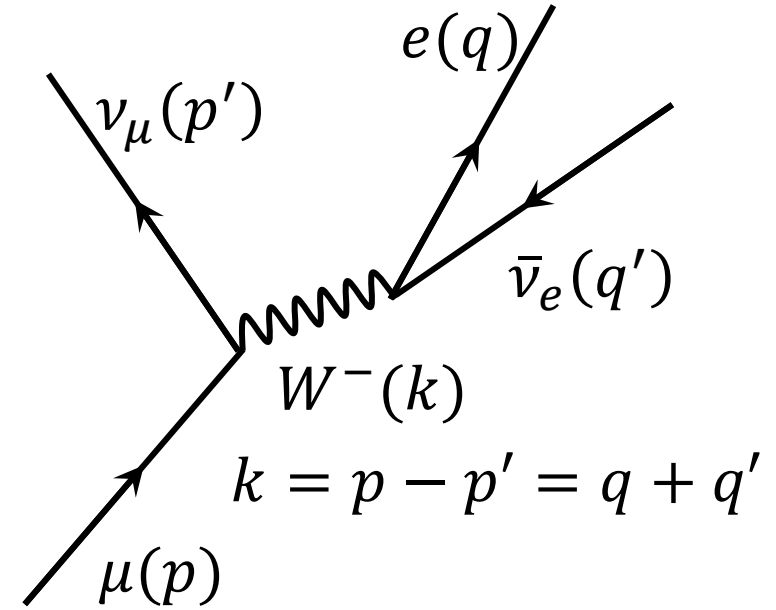
final state: $c_e^\dagger(q)d_{\nu_e}^\dagger(q')c_{\nu_\mu}^\dagger(p')|0\rangle$

intermediate state: $b^\dagger(k)|0\rangle_W$

$b^\dagger(k)$ は W^- の生成演算子

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{g}{\sqrt{2}}(J^{\mu\dagger}W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger)$$

$$J^\mu = \bar{\ell}^j \gamma^\mu P_L \nu^j$$



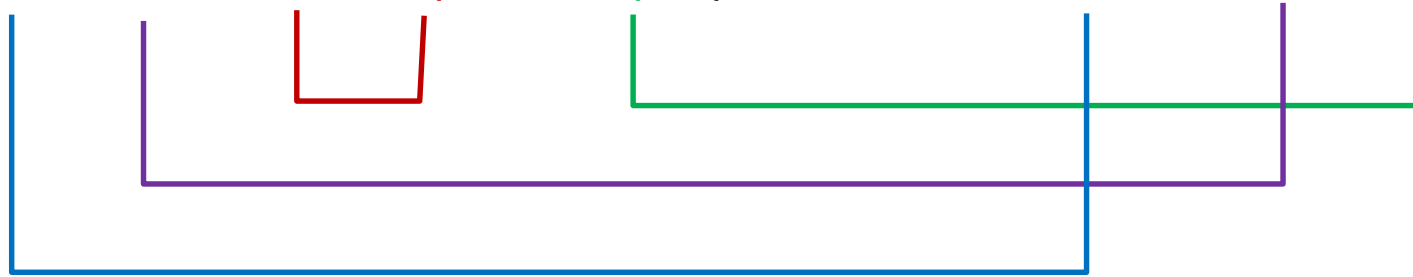
散乱行列要素（2次の摂動具体例： $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$ ）

$$\mu^-(p) \rightarrow \nu_\mu(p') + e^-(q) + \bar{\nu}_e(q')$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \rightarrow \bar{\nu}^j \gamma^\mu P_L \ell^j W_\mu + \bar{\ell}^j \gamma^\mu P_L \nu^j W_\mu^\dagger \quad j = e, \mu, \tau$$

$$\langle f, t' | \mathcal{L}_{\text{int}}(x') | n, t' \rangle \langle n, t'' | \mathcal{L}_{\text{int}}(x'') | i, t'' \rangle$$

$$\rightarrow \langle 0, t' | c(q) d(q') c(p') \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu P_L \ell_\mu W_\mu | n, t' \rangle \langle n, t'' | \bar{\ell}_e \gamma^\nu P_L \nu_e W_\nu^\dagger c^\dagger(p) | 0, t'' \rangle$$



x' と x'' を入れ替えた組み合わせのものも作れる。

散乱行列要素 ($\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$)

$$T_{fi}^{(2a)} = \frac{i^2}{2!} \left(-\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 \int d^4x \int d^4x' \bar{u}(p') e^{ip'x} \gamma^\mu P_L u(p) e^{-ipx} \bar{u}(q) e^{iqx'} \gamma^\nu P_L v(q') e^{iq'x'} \\ \times \sum_n \mathcal{T} \langle 0 | W_\mu(x) | n, t \rangle \langle n, t' | W_\nu^\dagger(x') | 0 \rangle$$

※ neutrino は質量固有状態として観測されることは事実上ないので、PMNS行列要素は不要

x と x' を入れ替えた組み合わせのものは、結局同じものになるので後で2倍する。

積分の中に出てくる中間状態の和の部分は、伝播関数(Propagator)と呼ばれ以下のように計算される

$$iD_F(x - x') = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \mathcal{T} [\langle 0 | W_\mu(x) | k, \lambda \rangle \langle k, \lambda | W_\nu(x') | 0 \rangle] \quad E = \sqrt{m_W^2 + \vec{k}^2} \\ = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \mathcal{T} [\varepsilon_\mu(k, \lambda) e^{-ikx} \varepsilon_\nu^*(k, \lambda) e^{ikx'}] \quad \lambda = +, -, 0$$

伝播関数 (Propagator)

偏極ベクトルの和の部分は,

$$\sum_{\lambda=+,-,0} \varepsilon_{\mu}(k, \lambda) \varepsilon_{\nu}^{*}(k, \lambda) = -g_{\mu\nu} + k_{\mu} k_{\nu} / m_W^2$$

T-Product の部分をあらわに書いて (ちょっと面倒な) 計算をすると

$$\begin{aligned} iD_F(x - x') &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{m_W^2} \right) [\theta(t - t') e^{-ik(x-x')} + \theta(t' - t) e^{ik(x-x')}] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik(x-x')} \frac{i}{k^2 - m_W^2 + i\varepsilon} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{m_W^2} \right) \end{aligned}$$

これを元の散乱行列要素の計算に適用すると

散乱行列要素 ($\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$)

$$\begin{aligned} T_{fi}^{(2a)} &= \frac{i^2}{2!} \left(-\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 \int d^4x \int d^4x' \bar{u}(p') e^{ip'x} \gamma^\mu P_L u(p) e^{-ipx} \bar{u}(q) e^{iqx'} \gamma^\nu P_L v(q') e^{iq'x'} \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-x')} \frac{i}{k^2 - m_W^2 + i\varepsilon} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2} \right) \\ &= \frac{1}{2!} \left(-i \frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \int d^4x \int d^4x' e^{i(p'-p+k)x} e^{i(q+q'-k)x'} \\ &\quad \times \bar{u}(p') \gamma^\mu P_L u(p) \frac{-i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_W^2)}{k^2 - m_W^2} \bar{u}(q) \gamma^\nu P_L v(q') \end{aligned}$$

$\int d^4x$, $\int d^4x'$ からそれぞれ $\delta^4(p' - p + k)$, $\delta^4(q + q' - k)$ が現れる

$$k = p - p' = q + q'$$

散乱行列要素 ($\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$)

最後に $\int d^4k$ で積分すると, $-i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ の形が出てくる

$$T_{fi}^{(2a)} = \frac{1}{2!} (2\pi)^4 \delta^4(p' + q + q' - p) \quad k = p - p' = q + q'$$
$$\times \bar{u}(p') \left(-i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L \right) u(p) \frac{-i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_W^2)}{k^2 - m_W^2} \bar{u}(q) \left(-i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\nu P_L \right) v(q')$$

x と x' を入れ替えた組み合わせのもので $2!$ は相殺

muon decay $\mu^-(p) \rightarrow \nu_\mu(p') + e^-(q) + \bar{\nu}_e(q')$ の不変振幅

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(2)} = \bar{u}(p') \left(-i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L \right) u(p) \frac{-i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_W^2)}{k^2 - m_W^2} \bar{u}(q) \left(-i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\nu P_L \right) v(q')$$

長々と計算して不変振幅にたどり着いたが **ファインマン則** を使うと簡単に得られる。

ファインマン則の説明は次章