

# 素粒子物理学

## — ファインマン則と散乱断面積 —

素粒子物理学  
OAJC041/O1BC098

2025年度春bc

武内勇司

# Feynman 則

時間軸を設定してDiagram を描く

Fermion 

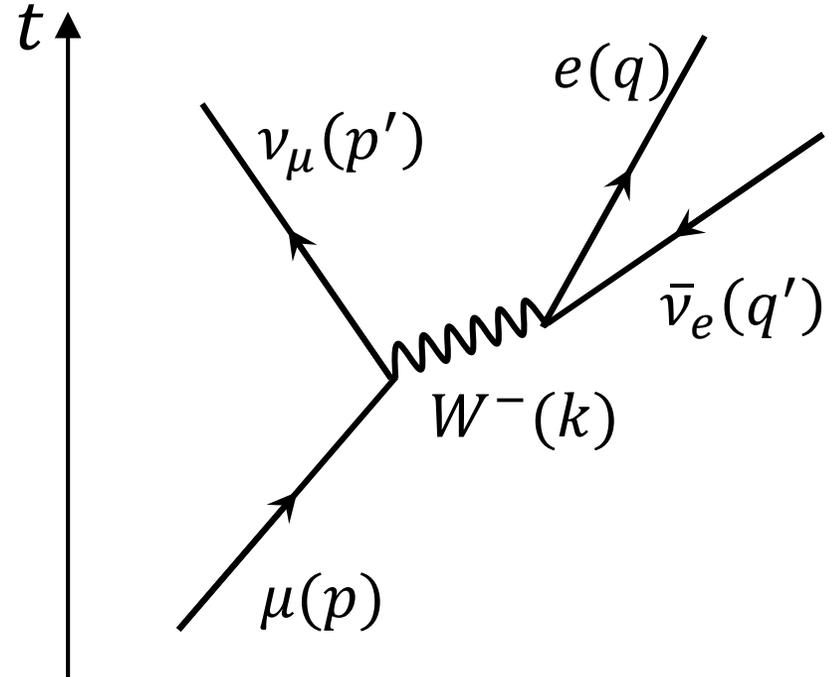
反Fermionは時間軸に逆行する方向にする

Gauge boson (photon, W/Z)



外線粒子に momentum (およびspin) の indexを付ける

始状態, 終状態の spin を気にしない場合は, 最終的にspin和をとるので spin indexは不要



$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$

# Feynman 則

各要素に以下を当てはめ、全体がスカラー量となる順番で式を組む

## 外線粒子

Fermion (粒子は  $u$ , 反粒子は  $v$ )

Incoming:  $u(\vec{p}, s)$  or  $v(\vec{p}, s)$  縦4成分(4x1)

outgoing:  $\bar{u}(\vec{p}, s)$  or  $\bar{v}(\vec{p}, s)$  横4成分(1x4)

Gauge boson ( $\gamma/W$ )

Incoming:  $\varepsilon_\mu(p, \lambda)$  outgoing:  $\varepsilon_\mu^*(p, \lambda)$

## 内線粒子

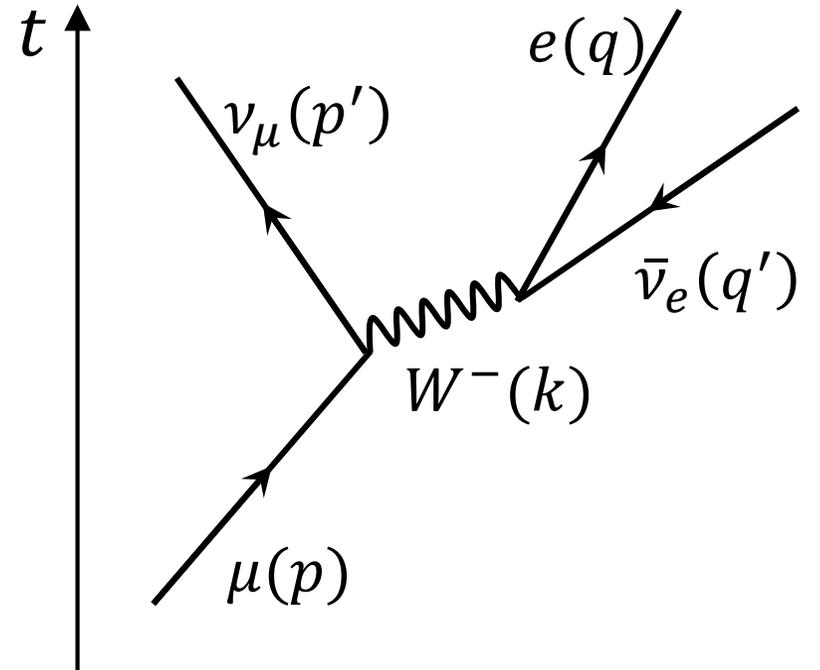
Fermion:  $\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$  4x4行列  $\gamma$ :  $\frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon}$

$W$ :  $\frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_W^2)}{p^2 - m_W^2 + i\varepsilon}$

## 頂点 4x4行列

$f$ - $f$ - $\gamma$  for  $+q$ :  $-iqe\gamma^\mu$   $f$ - $f'$ - $W$ :  $-i\frac{g}{\sqrt{2}}\gamma^\mu P_L$

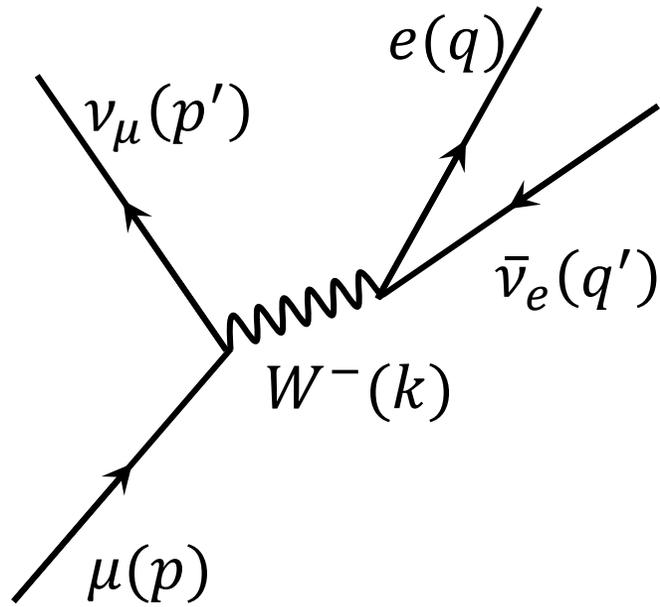
$f$ がquark の時は, down-type quark にCKM行列要素  $U_{ff'}$ , 又はその複素共役が入る



# Feynman 則 ( $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$ )

$$-i\mathcal{M} = \bar{u}(p') \left( -i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L \right) u(p) \frac{-i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_W^2)}{k^2 - m_W^2} \bar{u}(q) \left( -i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\nu P_L \right) v(q')$$

$$k = p - p' = q + q'$$



$\mu$  粒子質量 105.6 MeV に対して,  $W$  粒子質量 80 GeV

$$p = (m, \vec{0}), \quad p' = (\omega, \vec{p}') \quad \text{とすると} \quad \omega < \frac{m}{2}$$

$$k^2 = (p - p')^2 \sim m^2 - 2m\omega < m^2 \ll m_W^2$$

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_W^2)}{k^2 - m_W^2} \rightarrow \frac{ig_{\mu\nu}}{m_W^2}$$

$$-i\mathcal{M} \rightarrow -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(p') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p) \bar{u}(q) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(q')$$

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \equiv \frac{g^2}{8m_W^2}$$

Fermi 結合定数

# 散乱断面積(遷移確率)

$$T_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi}$$

遷移確率は素通しの項 ( $\delta_{fi}$ ) を引いて絶対値の2乗

$$\begin{aligned} |T_{fi} - \delta_{fi}|^2 &= (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \int d^4x e^{-i(p_f - p_i)x} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \int d^4x \end{aligned}$$

$$\delta^4(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-ipx}$$



単位体積・単位時間当たりの遷移確率

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

# 散乱断面積 (dLIPS)

質量殻  $p^2 = m^2$  ( $E > 0$ ) を持つ4元運動量の(ローレンツ不変な)微小体積要素

$$d^4p \delta(m^2 - p^2) \theta(E) = \frac{d^3p}{2E} \quad \text{但し } E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

1量子状態が占める位相体積は  $h^3 = (2\pi)^3$  なので1粒子が微小運動量空間  $d^3p$  に取れる状態数は,

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{2E} \quad \text{但し } E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

$P_i \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n$  の場合：
$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_i}{2E}$$

これに、遷移確率から来る  $(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)$  を加えて、以下のように、微小 Lorentz invariant phase space (dLIPS) を定義する。

$$d\Phi_n(P; P_1, \dots, P_n) = (2\pi)^4 \delta^4\left(P - \sum_{i=1}^n P_i\right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3P_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

# 微分断面積，微分崩壊幅

不変振幅の絶対値の二乗に  $d\text{LIPS}$  を掛け，始状態の粒子束密度(フラックス)で割ったものが散乱断面積（あるいは崩壊幅）となる。

場の規格化は，単位体積あたり  $2E$  個だったので，始状態のフラックスは，

粒子(質量  $M$ ) の崩壊の場合：  $F = 2M$

粒子1 (ある系でエネルギー  $E_1$ )，粒子2 ( $E_2$ ) の相対速度  $v_{12}$  の散乱の場合：

$$F = 4E_1E_2v_{12} = 4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2m_2^2}$$

微分崩壊幅：  $d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2M} d\Phi_n(P; P_1, \dots, P_n)$

微分断面積：  $d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2m_2^2}} d\Phi_n(P_1 + P_2; P_3, \dots, P_{n+2})$

# 2体崩壊・3体崩壊のdLIPS

$M(\text{rest}) \rightarrow m_1 + m_2$       質量 $M$ の粒子の $m_1, m_2$  への2体崩壊

$$d\Phi_2(M; P_1, P_2) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\vec{P}_1|}{M} d\Omega_1$$

$M(\text{rest}) \rightarrow m_1 + m_2 + m_3$

$$d\Phi_3(M; P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{4(2\pi)^3} dE_1 dE_2 = \frac{1}{16(2\pi)^3 M^2} dm_{12}^2 dm_{23}^2$$

但し、親粒子に特別な方向が存在しない（スピン0かスピン平均を取る）  
場合に限る