素粒子物理学
— muon decay width —

素粒子物理学
0AJC041/01BC098

2025年度春bc
武内勇司

μ 粒子崩壊幅計算：Matrix element

muon decay $\mu^-(p) \to \nu_\mu(p') + e^-(q) + \bar{\nu}_e(q')$

まず不変振幅の絶対値の二乗を計算する

不変振幅 $$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \underbrace{\bar{u}(p')\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p)} \underbrace{\bar{u}(q)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(q')}$$

このカタマリはスカラー量なのでそれぞれで
絶対値の二乗を計算すればよい。

$$[\bar{\varphi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\chi]^\dagger = \chi^\dagger(1-\gamma^5)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\varphi = \chi^\dagger\gamma^0(1+\gamma^5)\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\varphi$$
$$= \bar{\chi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\varphi$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2}{2} \bar{u}(p')\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(p')$$
$$\times \bar{u}(q)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(q')\bar{v}(q')\gamma_\nu(1-\gamma^5)u(q)$$

μ粒子崩壊幅計算：Matrix element

spinor空間(a, b をそれぞれ Dirac spinor とする)で

$$a^T b = (a_1 \quad \cdots \quad a_4)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{pmatrix} = \sum_i a_i b_i = \sum_{i,j} \delta_{ij} b_i a_j = \mathrm{Tr}\Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{pmatrix}(a_1 \quad \cdots \quad a_4)}_{4\mathrm{x}4行列}\Bigg] = \mathrm{Tr}(ba^T)$$

となるので,

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(p')$$

$$= \mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(p')\bar{u}(p')]$$

よって

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2}{2}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(p')\bar{u}(p')]$$

$$\times \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(q')\bar{v}(q')\gamma_\nu(1-\gamma^5)u(q)\bar{u}(q)\right]$$

μ 粒子崩壊幅計算：Matrix element

始状態，終状態の粒子のスピンは測定しない場合，各々の粒子でスピン和を取るので

$$\sum_{s=1,2} u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) = \not{p} + m \qquad \sum_{s=1,2} v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) = \not{p} - m$$

の関係を使うことができる。

以降 μ 粒子の質量 $m = 105.6\mathrm{MeV}$ に対して電子(0.511MeV), 及びニュートリノの質量を無視する

$$\sum_{\mathrm{spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2}{2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(1-\gamma^5)(\gamma^\rho p_\rho + m)\gamma^\nu(1-\gamma^5)\gamma^\sigma p'_\sigma\right]$$
$$\times \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(1-\gamma^5)\gamma_\lambda q'^\lambda \gamma_\nu(1-\gamma^5)\gamma_\delta q^\delta\right]$$
$$= 2G_F^2 p_\rho p'_\sigma q'^\lambda q^\delta \mathrm{Tr}[(1+\gamma^5)\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma] \times \mathrm{Tr}\left[(1+\gamma^5)\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\delta\right]$$

※ m の項は，$\gamma^\nu(1-\gamma^5) = (1+\gamma^5)\gamma^\nu$ なので，$(1-\gamma^5)(1+\gamma^5) = 0$ となり消える

μ粒子崩壊幅計算：MEのTrace 計算

不変振幅の絶対値の二乗を計算する場合，スピン和を取ると，結局γ行列のtrace計算に帰着する。これらは，γ行列の積のtrace公式を使うと(多少面倒であるが)機械的に計算できる。

μ粒子崩壊の不変振幅の計算で使う公式は以下

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}]$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

あと， Levi-Civita の反対称テンソルの公式

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\gamma\delta} = -2\left(g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta} - g^{\rho\delta}g^{\sigma\gamma}\right)$$

これらを使用してtrace計算を実行すると，以下が得られる。

$$\sum_{\mathrm{spin}}|\mathcal{M}|^2 = 128G_F^2(p\,q')(p'q)$$

μ 粒子崩壊幅計算：スピン平均ME

始状態に関しては μ 粒子の２通りのスピン状態の和になっているので，２で割る。

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2}\sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = 64 G_F^2 (p\,q')(p'q)$$

Kinematics をもう少し簡潔にする: $\mu(p) \to \nu_\mu(p') + e(q) + \bar{\nu}_e(q')$

$p = p' + q + q'$ なので，$2(p\,q')(p'q) \cong (p\,q')(p' + q)^2 = (p\,q')(p - q')^2$

μ の静止系で $p = \left(m, \vec{0}\right)$，$q' = (\omega', \vec{q}')$ とすると（但し $\omega' \equiv |\vec{q}'|$）

$$p\,q' = m\omega' \qquad (p - q')^2 = (m - \omega')^2 - \omega'^2 = m^2 - 2m\omega'$$

$$\overline{|M|^2} = 32 G_F^2 (p\,q')(p - q')^2 = 32 G_F^2 m^2 \omega' (m - 2\omega')$$

μ 粒子崩壊幅計算：微分崩壊幅

3体崩壊の dLISP は，$q = (E, \vec{q})$ として

$$d\Phi_3 = \frac{1}{4(2\pi)^3} dE d\omega'$$

以上より微分崩壊幅は

$$d\Gamma = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{2m} d\Phi_3 = \frac{G_F^2 m}{2\pi^3} \omega'(m - 2\omega') dE d\omega'$$

崩壊幅は，これをEとω' について可能な phase space で積分して得られる.

μ粒子崩壊幅計算：Phase space

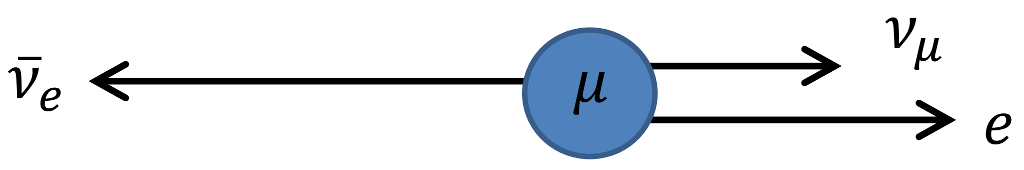
$\mu(p) \to \nu_\mu(p') + e(q) + \bar{\nu}_e(q')$

4元運動量：　$p = (m, \vec{0})$　　$q' = (\omega', \vec{q}')$　　$q = (E, \vec{q})$　　$p' = (E', \vec{p}')$

μ粒子以外は massless で近似

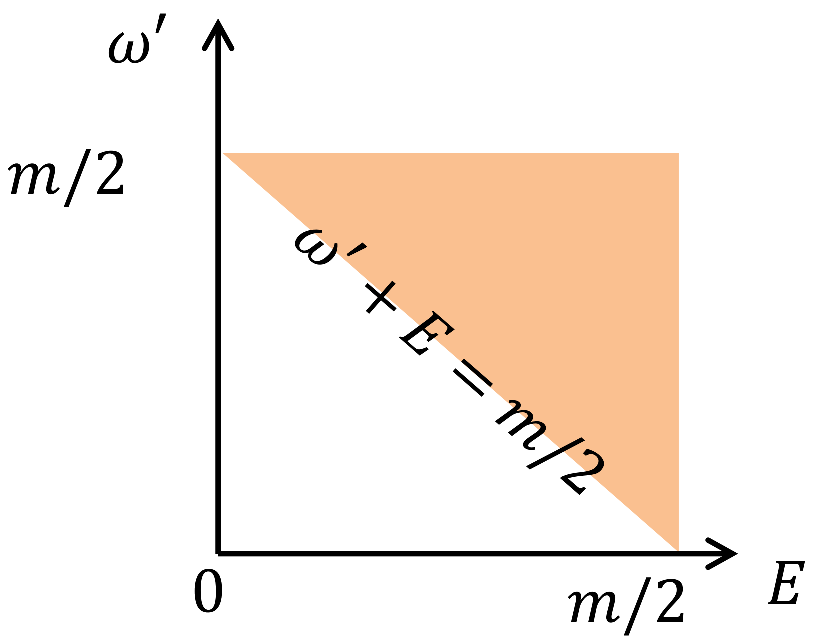
$m = \omega' + E + E'$

ω' の最大値は，$\bar{\nu}_e$ と ν_μ，e が逆方向のとき $m/2$
なので $0 \leq \omega' \leq m/2$



同様に $0 \leq E, E' \leq m/2$

$E' = m/2$ のとき $\omega' + E = m/2$ すなわち積分範囲は
$0 \leq E \leq m/2$，$m/2 - E \leq \omega' \leq m/2$



μ粒子崩壊幅計算：崩壊幅と寿命

まずω'で積分

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{G_F^2 m}{2\pi^3}\int_{m/2-E}^{m/2} d\omega'\omega'(m-2\omega') = \frac{G_F^2 m^2 E^2}{12\pi^3}\left(3-\frac{4E}{m}\right)$$

次にEで積分

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m^2}{12\pi^3}\int_0^{m/2} dE\, E^2\left(3-\frac{4E}{m}\right) = \frac{G_F^2 m^5}{192\pi^3}$$

$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ の崩壊分岐比は，ほぼ100%なので，この崩壊幅の逆数がそのままμ粒子の寿命となる。

$G_F \sim 1.17\times 10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2}$，$m = 0.106\mathrm{GeV}$ を代入すると

$$\tau = 1/\Gamma \sim 3.29\times 10^{15}\mathrm{MeV}^{-1} \Rightarrow 2.2\mu s$$