素粒子物理学
— P, C, CP—

素粒子物理学
0AJC041/01BC098

2025年度春bc

武内勇司

CKM, PMNS 行列

SU(2) doublet (Flavor 固有状態)

$$L_L^j \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix}^j \qquad Q_L^j \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}^j$$

Flavor固有状態の方は、 ν_ℓ $(\ell = e, \mu, \tau)$ や d', s', b' として、
質量固有状態の方を ν_i $(i = 1,2,3)$ や d, s, b と記述する。

CKM 行列

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{ud} & U_{us} & U_{ub} \\ U_{cd} & U_{cs} & U_{cb} \\ U_{td} & U_{ts} & U_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

Flavor固有状態　　質量固有状態

PMNS 行列

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

Flavor固有状態　　質量固有状態

電弱相互作用の Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EW\ int}} = -eJ^{\mu}_{EM}A_{\mu} - \frac{g}{\sqrt{2}}\left(J^{\mu\dagger}W_{\mu} + J^{\mu}W^{\dagger}_{\mu}\right) - \frac{g}{\cos\theta_W}J^{\mu}_{Z}Z_{\mu}$$

Weak charged current

$$J^{\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=e,\mu,\tau}\bar{\ell}\gamma^{\mu}(1-\gamma^{5})\nu_{\ell} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{Q=u,c,t\\ q=d,s,b}}U^{*}_{Qq}\bar{q}\gamma^{\mu}(1-\gamma^{5})Q$$

$W^{\pm}$による相互作用 (charged current) では，Lカイラリティとのみ結合し，
質量固有状態で考えると，異なる世代の結合がある。

パリティ反転で，LとRカイラリティは入れ替わるので，charged current による
相互作用は，パリティを最大限に破る。

Quark の場合は，質量固有状態の down-type quark (CKM行列)，
Leptonでは質量固有状態の neutrino (PMNS行列) は混合。

電弱相互作用の Lagrangian

EM current

$$J^\mu_{\mathrm{EM}} = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} (-)\bar{\ell}\gamma^\mu\ell + \sum_{Q=u,c,t}\left(\frac{2}{3}\right)\bar{Q}\gamma^\mu Q + \sum_{q=d,s,b}\left(-\frac{1}{3}\right)\bar{q}\gamma^\mu q$$

※ 上記の項は d でも記述しても d' で記述しても同じ

電磁相互作用は，パリティ変換で対称。

Weak neutral current

$$J^\mu_Z = J^{3\mu} - \sin^2\theta_W J^\mu_{\mathrm{EM}}$$

$$J^{3\mu} = \frac{1}{4}\sum_{\ell=e,\mu,\tau}\left[\bar{\nu}_\ell\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu_\ell - \bar{\ell}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ell\,\right]$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{\substack{Q=u,c,t\\ q=d,s,b}}[\bar{Q}\gamma^\mu(1-\gamma^5)Q - \bar{q}\gamma^\mu(1-\gamma^5)q]$$

Zは，純粋なLカイラリティとの結合ではない。EM currentが $\sin^2\theta_W$ 分混入する。

Z や γ による相互作用 (Neutral current)では，世代が異なる結合はない。

▶ FCNC (Flavor Changing Neutral Current) は標準模型にはない。

電弱相互作用でのParity非保存

Parity violation の例

$\pi^+ \to \mu^+ \nu_L$　　ν_Lはほぼ負ヘリシティ(スピンと運動方向が逆)：現実で起こる。

P変換 $\pi^+ \to \mu^+ \nu_R$　　ν_R はほぼ正ヘリシティ： 現実にはほぼ存在しない。

C変換 $\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_R$　　$\bar{\nu}_R$ はほぼ負ヘリシティ： 現実にはほぼ存在しない。

C変換で L/Rカイラリティは反転

CP変換 $\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_L$　　$\bar{\nu}_L$ はほぼ正ヘリシティ：現実で起こる。

弱い相互作用における $\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ という結合は，V(vector)-A(axial vector) という形をしているので，V-A 結合と呼ばれる。

P，C非保存は，この V-A結合に起因しているが，V-A結合はCP変換では保存する。ならば標準模型は CP変換で対称か？

電磁相互作用のP対称性

P変換　$x^\mu = (x_0, \vec{x}) \xrightarrow{P} x'^\mu = (x_0, -\vec{x}) = x_\mu$　　$\psi \xrightarrow{P} \psi^P = P\psi = \gamma^0\psi$

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$(J^\mu)^P = \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger} = \gamma_\mu$を使った

$$(A^\mu)^P = A_\mu$$

$J^\mu A_\mu$はP変換で形は不変だが，空間座標がP変換されて元の通りではない。
しかし，これを全空間で積分した Lagrangian

$$L = \int d^3x\left(-e\, J^\mu A_\mu\right)$$

はP変換で保存。

電磁相互作用のC対称性

C変換　$\psi \xrightarrow{C} \psi^C = C\bar{\psi}^T$　　$\overline{\psi^C} = -\psi^T C^{-1}$

$$(J^\mu)^C = \overline{\psi^C}\gamma^\mu\psi^C = -\psi^T C^{-1}\gamma^\mu C\bar{\psi}^T = \psi^T\gamma^{\mu T}\bar{\psi}^T$$

$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$を使った

$$= (-)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$は，Dirac spinor 空間でのスカラー量なので，transpose しても変わらない。しかし，前後の Dirac場が入れ変わるので，Dirac場の反可換性により，負号が出てくる。

$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu = j^\mu$ なのでA^μは，j^μ と同じC変換性を持つ。　$(A^\mu)^C = -A^\mu$

$$L = \int d^3x\left(-e\, J^\mu A_\mu\right)$$

はC変換で保存

CP変換で保存も明らか

弱い相互作用(Charged current)のP対称性

$$J^\mu = U_{Qq}^* \bar{q}\gamma^\mu P_L Q$$

U_{Qq}^* は，CKM行列要素。
q や Q は，質量固有状態の場なので，CKM行列要素がつく。

$$(J^\mu)^P = U_{Qq}^* \bar{q}\gamma^0\gamma^\mu P_L\gamma^0 Q = U_{Qq}^* \bar{q}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 P_R Q = U_{Qq}^* \bar{q}\gamma_\mu P_R Q$$

$P_L\gamma^0 = \gamma^0 P_R$を使った

Lカイラリティ(V-A)の Charged current は，P変換でRカイラリティ(V+A)になる。

Wボソンの P変換性は，Photon（Vector場）と同じ　$(W_\mu)^P = W^\mu$

$$L = \int d^3x \left[-\frac{g}{\sqrt{2}} \left(J^{\mu\dagger} W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger \right) \right]$$ はP変換で保存しない。

弱い相互作用(Charged current)のC対称性

$$(J^\mu)^C = U_{Qq}^* \overline{q^C} \gamma^\mu P_L Q^C = -U_{Qq}^* q^T C^{-1} \gamma^\mu P_L C \bar{Q}^T = -U_{Qq}^* q^T C^{-1} \gamma^\mu C P_L \bar{Q}^T$$

$$= U_{Qq}^* q^T \gamma^{\mu T} P_L \bar{Q}^T$$

$C\gamma^5 C^{-1} = \gamma^5$，$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$を使った

$$= (-) U_{Qq}^* \bar{Q} P_L \gamma^\mu q = -U_{Qq}^* \bar{Q} \gamma^\mu P_R q$$

※ Dirac場の反可換性により，負号が出てくる。

Lカイラリティ(V−A)のCharged current は，C変換でRカイラリティ(V+A)になる。

WボソンのC変換性は，Photon と同じく負号が出るが，複素場なので†も出る。

$$(W_\mu)^C = -W_\mu^\dagger$$

$$L = \int d^3x \left[-\frac{g}{\sqrt{2}} (J^{\mu\dagger} W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) \right]$$ はC変換で保存しない。

弱い相互作用(Charged current)のCP対称性

$$J^\mu = U^*_{Qq}\bar{q}\gamma^\mu P_L Q$$

$$(J^\mu)^{CP} = \left(-U^*_{Qq}\bar{Q}\gamma^\mu P_R q\right)^P = -U^*_{Qq}\bar{Q}\gamma_\mu P_L q \qquad \left(W_\mu\right)^{CP} = -W^{\mu\dagger}$$

$J^{\mu\dagger}$ を計算してみると

$$J^{\mu\dagger} = \left(U^*_{Qq}\bar{q}\gamma^\mu P_L Q\right)^\dagger = U_{Qq}Q^\dagger P_L \gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 q = U_{Qq}Q^\dagger\gamma^0 P_R\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 q = U_{Qq}\bar{Q}\gamma^\mu P_L q$$

U_{Qq} が実数なら $J^\mu W^\dagger_\mu$ は，CP変換で $J^{\mu\dagger}W_\mu$ と同じ形になる。つまり

$$L = \int d^3x\left[-\frac{g}{\sqrt{2}}\left(J^{\mu\dagger}W_\mu + J^\mu W^\dagger_\mu\right)\right] \quad \text{はCP変換で保存}$$

Quark/Lepton の混合行列(CKM, PMNS)の要素は実数か？

N世代の Quark/Lepton混合行列

N世代の Quark/Lepton の混合行列：U_{jk}　（一般には複素ユニタリー行列）

実パラメータ数：$N \times N \times 2$

Unitary matrix: $U^{\dagger}U = 1 \ \Rightarrow \ N^2$個の方程式

$2N$個の Flavor のU(1)相対位相差は自由に取れる。

$\psi_i \rightarrow \psi_i' = \psi_i \exp(i\delta_i)$　　$U_{ud}^{*}\bar{d}\gamma^{\mu} P_L u \rightarrow U_{ud}^{*}\exp(i\delta_u - i\delta_d)\bar{d}\gamma^{\mu} P_L u$

つまり $U_{jk} \rightarrow U_{jk}\exp\left(i\delta_k - i\delta_j\right)$ とできた。但し，行列全体に共通な位相(overall phase)は，$U^{\dagger}U = 1$ の条件として使用済み。

残り $2N - 1$ の自由度を吸収。

結局 $2N^2 - N^2 - (2N - 1) = (N - 1)^2$の実パラメータを持つ。

N世代の Quark/Lepton混合行列

もし，Uの要素が全て実だとすると $\Rightarrow$ N^2個の実パラメータ

要素が実なので $U^\dagger = U^T$　　　$U^\dagger U = U^T U = 1$

$U^T U$ は，実対称行列なので，方程式の数は，　$N + \frac{1}{2}(N^2 - N) = \frac{1}{2}N(N+1)$

つまり，要素が全て実だった場合，混合行列の自由な実パラメータ数は，

$$N^2 - \frac{1}{2}N(N+1) = \frac{1}{2}N(N-1)$$

結局，N世代の Quark/Lepton の混合行列は，$(N-1)^2$ 個の実パラメータを持ち，
そのうち $N(N-1)/2$個は，実行列要素を表すのに使用される。

残り

$$(N-1)^2 - \frac{1}{2}N(N-1) = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$$

個のパラメータは，行列要素の複素位相となる。

2世代の混合行列

$N=2$のとき

実パラメータ： $(N-1)^2=1$　　複素位相： $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)=0$

つまり混合行列は，実パラメータθ_c があって全ての行列要素は実

Quark の場合，3世代目の Quark が発見される前は，２世代のQuark の混合行列

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

$\theta_c \sim 13^\circ$：Cabibbo Angle

が知られていた。

3世代の混合行列

N =3のとき　実パラメータ：$(N-1)^2 = 4$　　　複素位相：$\frac{1}{2}(N-1)(N-2) = 1$

つまり混合行列は，4個の実パラメータ$(\theta_{12}, \theta_{23},\theta_{13},\delta_{13})$ があってδ_{13}は複素位相

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ & 1 & \\ -s_{13}e^{i\delta_{13}} & & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & \\ -s_{12} & c_{12} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_{ij} = \sin\theta_{ij}$$

$$c_{ij} = \cos\theta_{ij}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

Quark の混合行列の場合，これは CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa)行列と呼ばれる。

$\theta_{12} = 13.04 \pm 0.05°$　　$\theta_{23} = 2.38 \pm 0.06°$　　$\theta_{13} = 0.201 \pm 0.011°$

実パラメータ：4　　複素位相:1　　$\delta_{13} = 1.20 \pm 0.08$ rad

CP の破れの例

K_L^0：中性K中間子(寿命が長いものと短いものがあり，長いほう $\tau \sim 5.1\times10^{-8}s$)
擬スカラー粒子: スピン0, パリティーが負 ($J^P=0^-$と書く)

K_L^0は弱い相互作用で
$K_L^0 \to \pi\pi\pi$ $(\pi^+\pi^-\pi^0,\ \pi^0\pi^0\pi^0)$　　Br～32%
$K_L^0 \to \pi\pi,$ $(\pi^+\pi^-,\ \pi^0\pi^0)$　　Br～3×10^{-3}
というCP固有状態への崩壊をする。

π^+, π^0, π^- （パイ中間子）は，擬スカラー粒子 ($J^P=0^-$)
π^0は，C固有状態で$C=+1$ ($J^{PC}=0^{-+}$)

K_L^0からの崩壊（全軌道角運動量が0）の場合：
$\pi\pi\pi$: $CP=-1$　　$\pi\pi$: $CP=+1$

K_L^0は，$CP=-1$ の終状態へと普通に崩壊するが，僅かに $CP=+1$の終状態にも崩壊する。実は K_L^0は，ほぼ $CP=-1$であるが，CPの破れによって $CP=+1$が僅かに混ざった状態が質量固有状態となることが知られている。

P, C, CP のまとめ

電磁相互作用は，P, C, CP 変換で対称

弱い相互作用における V-A結合は，P, C対称性を最大限に破る。
但し V-A結合は CP変換では対称。

Quark/Leptonの３世代の混合行列(ユニタリー行列)は複素位相を持つ。このため，Charged current による弱い相互作用では，CP対称性が破れる。

但し，Quark混合行列での CP の破れは，$O(10^{-3})$程度。