

下記設問 [1]～[6] から最低1問以上選んで回答せよ。

但し Pauli行列として,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

の定義を使う。

[1] 難度:易 (微小体積要素のLorentz不変性)

微小要素

$$d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

及び

$$\frac{d^3p}{E} = \frac{dp_x \wedge dp_y \wedge dp_z}{E'} \quad (\text{但し } p^2 = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2)$$

がローレンツ不変であることを, 以下のような x 軸方向への速度 β のローレンツブーストの場合について確かめよ。

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

(hint1) $\wedge$ という記号は「外微分形式」にでてくる「ウェッジ(wedge)積」で,

$$dt \wedge dx = -dx \wedge dt, \quad dt \wedge dt = dx \wedge dx = 0 \quad \text{の様に外積に似た性質を持つ.}$$

これらの性質を使って解くと簡単

(ヤコビアン行列を使った解法でももちろんOK)

$$(\text{hint2}) \quad E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 \quad \text{なので} \quad E dE = p_x dp_x + p_y dp_y + p_z dp_z$$

[2] 難度:易～中 (電磁場のHamiltonian)

電荷・電流源が存在しない空間 ($j^\mu = 0$) において, 電磁場の Lagrangian density が

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \text{但し } F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad A_\mu = (\phi, -\vec{A})$$

と与えられているとする。

(1) 共役運動量

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\mu)}$$

を求めよ。

(2) Hamiltonian density

$$\mathcal{H} = \pi_\mu \partial_0 A^\mu - \mathcal{L}$$

を計算し,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi$$

となることを示せ。

(3) 上式第2項 $\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi$ は, 全空間積分で 0 になることを示せ。但し, 無限遠で $\phi \rightarrow 0$ とする。

(Hint) $\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{V}) = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \varphi + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ φ : Scalar $\vec{V}$: Vector

$$\int_{\Omega} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot \hat{n} ds \quad \text{Gaussの定理}$$

を使う。

[3] 難度:易 (spinor の共役)

2成分spinor ϕ に対して, ある $\text{su}(2)$ 回転群の元 u による変換

$$u: \phi \longrightarrow \phi' = u\phi$$

が定義されているとき, $\tilde{\phi} \equiv -i\sigma_2\phi^*$, $\tilde{\phi}' \equiv -i\sigma_2\phi'^*$ が同じ u による変換 (σ_i はPauli行列)

$$u: \tilde{\phi} \longrightarrow \tilde{\phi}' = u\tilde{\phi}$$

を受けることを以下の手順で示せ。

(1) 任意の $\text{SU}(2)$ 回転群の元 u は,

$$u = \exp(i\sigma) \quad \text{但し } \sigma = \theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2 + \theta_3\sigma_3 \quad (\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in R)$$

とおける。

$$\sigma_2\sigma^* = -\sigma\sigma_2$$

を示せ。(注: σ^* と $\sigma^\dagger$ を混同しないように)

(2) $\exp(i\sigma) = 1 + i\sigma + (i\sigma)^2/2! + (i\sigma)^3/3! + (i\sigma)^4/4! + \dots$

を用い

$$\sigma_2 u^* = u \sigma_2$$

を示せ。

(3)

$$\tilde{\phi}' = u\tilde{\phi}$$

を示せ。

[4] 難度:易～中 (spin1/2粒子・反粒子2体系の合成スピン)

スピン1/2の粒子・反粒子のスピンZ軸成分の固有状態に対応する2成分spinor

$$\text{粒子: } \phi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{反粒子: } \chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \chi_\downarrow = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$-\chi^\dagger \vec{\sigma} \phi = (-\chi^\dagger \sigma_1 \phi, -\chi^\dagger \sigma_2 \phi, -\chi^\dagger \sigma_3 \phi) \quad \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3): \text{Pauli行列を要素とするベクトル}$$

の量をそれぞれのスピン状態(2x2=4通り)について計算し, それらが以下のスピン1/2の二体系の合成スピンの関係

$$\begin{aligned}
(J=1, J_Z=1): & \quad |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle & \vec{\varepsilon}(+) &= (-1, -i, 0)/\sqrt{2} \\
(J=1, J_Z=0): & \quad |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle & \vec{\varepsilon}(0) &= (0, 0, 1) \\
(J=1, J_Z=-1): & \quad |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle & \vec{\varepsilon}(-) &= (1, -i, 0)/\sqrt{2}
\end{aligned}$$

に対応したスピン1の偏極ベクトルにそれぞれ一致することを確認めよ。

また

$$(J=0, J_Z=0): \quad |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$$

の場合, $-\chi^\dagger \sigma \phi$ はどうなるか?

[5] 難度:易～中 (スピン1/2の粒子二体系の合成スピン)

2成分spinor の i -軸まわりの角度 θ の回転演算は,

$$R_i(\theta) = e^{-i\sigma_i\theta/2}$$

と書ける。ここで, σ_i は, Pauli行列である。

1) 以下を示せ。

$$\begin{aligned}
R_1(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & R_2(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
R_3(\theta) &= \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$[\text{hint}] \quad R_i(\theta) = 1 - i\sigma_i\theta/2 + (-i\sigma_i\theta/2)^2/2! + (-i\sigma_i\theta/2)^3/3! + (-i\sigma_i\theta/2)^4/4! + \dots$$

$$\sigma_i^2 = 1 \quad (2 \times 2 \text{ の単位行列})$$

2) 2成分spinorの3-軸成分の固有状態 $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及び $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を2-軸まわりに $+\pi/2$ の回転を行い, 1-軸成分の固有状態 $|R\rangle, |L\rangle$ を求め,

$$\sigma_1|R\rangle = |R\rangle \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$\sigma_1|L\rangle = -|L\rangle \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

を確認めよ。

3) 2)の結果を用い, スピン1/2の粒子二体系の合成スピン状態に対して, 以下を確認めよ。

$$(J=1, J_Z=0): \quad |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle = |R\rangle|R\rangle - |L\rangle|L\rangle$$

$$(J=0, J_Z=0): \quad |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle = |R\rangle|L\rangle - |L\rangle|R\rangle$$

[6] 難度:中 (スピン1/2のLarmor歳差)

磁場中に静止した磁気能率 $\vec{\mu}$ を持つスピン1/2の粒子において, スピン部分の状態 χ (χ は2成分spinor) の時間発展は

(χ は, 2成分spinor)

$$i\frac{d}{dt}\chi = H\chi, \quad H \equiv -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (\text{Eqn1})$$

に従う。

今, 1軸方向の一様磁場 $\vec{B} = (B, 0, 0)$ を考える。また, 磁気能率 $\vec{\mu}$ は, 粒子のスピンに比例するとする。

$$\vec{\mu} = g\vec{s} \quad \vec{s} \equiv \frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : \text{パウリ行列を要素とするベクトル}$$

1) χ は, 以下の微分方程式に従うことを示せ。

$$\frac{d^2}{dt^2}\chi = -\frac{1}{4}g^2B^2\chi$$

2) 1)で得た微分方程式の一般解として,

$$\chi = \alpha \exp\left(i\frac{gB}{2}t\right) + \beta \exp\left(-i\frac{gB}{2}t\right) \quad \alpha, \beta : 2\text{成分spinor}$$

とおいた。これを ϕ の時間発展の方程式 (Eqn1) へ代入し,

$$\alpha = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \eta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \xi, \eta \in C : \text{複素数}$$

とできることを示せ。

3) 時刻 $t=0$ において $\chi(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}gBt\right) \\ i\sin\left(\frac{1}{2}gBt\right) \end{pmatrix}$$

となることを示せ。

4) 3)で得た $\chi(t)$ は,

$$\hat{r}(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) : (\theta, \varphi)\text{方向の単位ベクトル}$$

$$s(\theta, \varphi) \equiv \frac{1}{2}\sigma(\theta, \varphi) \equiv \frac{1}{2}\hat{r}(\theta, \varphi) \cdot \vec{\sigma}$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_1\sin\theta\cos\varphi + \sigma_2\sin\theta\sin\varphi + \sigma_3\cos\theta) : (\theta, \varphi)\text{方向のspin1/2演算子}$$

としたとき, $s\left(\theta = gBt, \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ の $+1/2$ 固有状態である(つまり2-3軸平面で角速度 gB で回転する)

ことを示せ。

[EOF]