素粒子物理学 レポート問題 No.2

2025/6/13

下記設問 [1〜7] から最低1問以上選んで回答せよ.

---

[1] 難度:易 (KG方程式)

Klein–Gordon 方程式 $(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\psi=0$ の解の一例として

$$\psi(x)=Ae^{-ipx}+Be^{ipx}\qquad (p^2=m^2)$$

とした(但し $A,B\in\mathbb{C}$ は0でない定数)。

(1) $\psi(x)$ がKlein–Gordon方程式を満たすことを確かめよ。

(2) $\rho\equiv\psi^*\psi$ とすると $\dfrac{d\rho}{dt}\neq 0$ となることを確かめよ。

(3) $\rho\equiv i[\psi^*(\partial_t\psi)-(\partial_t\psi^*)\psi]$ であれば $\dfrac{d\rho}{dt}=0$ となることを確かめよ。

---

[2] 難度:易〜中 (複素スカラー場の複素位相U(1)変換対称性に対応する Noether current)

Klein–Gordon 方程式 $(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\psi=0$ の解について

$$Q\equiv\int d^3x i[\psi^*(\partial_t\psi)-(\partial_t\psi^*)\psi]$$

と定義すると, $\dfrac{dQ}{dt}=0$ を(ネーターの定理は使わず上式 Q から dQ/dt を直接計算して)確かめよう。

但し ψ は, 無限遠で $\psi\to 0$ と仮定する。

[hint] 任意の実場 φ, ψ に対して, 領域 V 及びその境界 ∂V 上の積分について

$$\int_V(\varphi\boldsymbol{\nabla}^2\psi-\psi\boldsymbol{\nabla}^2\varphi)dv=\int_{\partial V}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds\qquad \text{Green の定理}$$

---

[3] 難度:中 (複素スカラー場のHamiltonian)

複素スカラー場 ψ に対して, Lagrangian density, 共役運動量 π, 及び, Hamiltonian density は,

$$\mathcal{L}\equiv\partial_\mu\psi^\dagger\partial^\mu\psi-m^2\psi^\dagger\psi\qquad \pi\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_t\psi]}=\partial_t\psi^\dagger\qquad \pi^\dagger=\partial_t\psi$$

$$\mathcal{H}\equiv\pi\partial_t\psi+(\partial_t\psi^\dagger)\pi^\dagger-\mathcal{L}$$

と与えられる。

以下の問に答えよ。なお, ψ, $\psi^\dagger$, π, $\pi^\dagger$, a, $a^\dagger$, b, $b^\dagger$ は, 演算子なので積の順番を入れ替えてはいけないことに注意。

(1) $\mathcal{H}=\partial_t\psi^\dagger\partial_t\psi+\partial_i\psi^\dagger\partial_i\psi+m^2\psi^\dagger\psi$ を示せ。

(2) $\psi=\displaystyle\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}[a(\vec{p})e^{-ipx}+b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}]$ 但し $p=(E,p_i)$, $p^2=E^2-p_i^2=m^2$

とする。

$$H\equiv\int d^3x(\partial_t\psi^\dagger\partial_t\psi+\partial_i\psi^\dagger\partial_i\psi+m^2\psi^\dagger\psi)$$

から

$$H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2}[a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p})+b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})]+\text{const}$$

を導け。

(Hint)

$$\partial_t\psi=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}iE[-a(\vec{p})e^{-ipx}+b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}] \qquad \partial_i\psi=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\,2E}\,ip_i[a(\vec{p})e^{-ipx}-b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}]$$

$$\int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}e^{\pm i\vec{p}'\cdot\vec{x}}=\delta(\vec{p}\pm\vec{p}')$$

---

[4] 難度:中〜難 (複素スカラー場のMomentum)

複素スカラー場 ψ に対して, Lagrangian density, 共役運動量 π は,

$$\mathcal{L}\equiv\partial_\mu\psi^\dagger\partial^\mu\psi-m^2\psi^\dagger\psi \qquad \pi\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_t\psi]}=\partial_t\psi^\dagger \qquad \pi^\dagger=\partial_t\psi$$

と与えられる。この Lagrangian density の座標の平行移動に対する対称性から Noether current として Energy-momentum tensor $T^{\mu\nu}$ が,

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial^\nu\psi+\partial^\nu\psi^\dagger\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^\dagger)}-g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

のように与えられる。

以下の問に答えよ。なお, ψ, $\psi^\dagger$, π, $\pi^\dagger$, a, $a^\dagger$, b, $b^\dagger$ は, 演算子なので積の順番を入れ替えてはいけないことに注意。

(1) T^{00} は, Energy density を表しており,

$$T^{00}=\partial_t\psi^\dagger\partial_t\psi+\partial_i\psi^\dagger\partial_i\psi+m^2\psi^\dagger\psi \quad (\equiv\mathcal{H})$$

を示せ。

(2) T^{0i} は, Momentum density を表しており,

$$T^{0i}=-[\pi\partial_i\psi+(\partial_i\psi^\dagger)\pi^\dagger]$$

を示せ。

(3) $P_i\equiv\int d^3xT^{0i}=-\int d^3x[\pi\partial_i\psi+(\partial_i\psi^\dagger)\pi^\dagger]$ から

$$P_i=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}p_i[a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p})+b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})]+\mathrm{const}$$

を導け。

(4) $[P,a^\dagger(\vec{p})]=\vec{p}a^\dagger(\vec{p}) \qquad [P,b^\dagger(\vec{p})]=\vec{p}b^\dagger(\vec{p})$

を示し, これらを用いて以下のように複素スカラー場の1粒子, 1反粒子状態がそれぞれ運動量演算子 P の固有状態となっていることを導け。

$$Pa^\dagger(\vec{p})|0\rangle=\vec{p}a^\dagger(\vec{p})|0\rangle \qquad Pb^\dagger(\vec{p})|0\rangle=\vec{p}b^\dagger(\vec{p})|0\rangle$$

(Hint)

$$\partial_t\psi=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}iE[-a(\vec{p})e^{-ipx}+b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}] \qquad \partial_i\psi=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\,2E}\,ip_i[a(\vec{p})e^{-ipx}-b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}]$$

$$\int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}e^{\pm i\vec{p}'\cdot\vec{x}}=\delta(\vec{p}\pm\vec{p}')$$

---

[5] 難度:中〜難 (Dirac spinor の Lorentz 変換性)

z(3軸)方向への速度βの Lorentz boost (※)

※ 観測者の系に対してz(3軸)方向に速度βで動いている系における4元ベクトル x を観測者の系で見たときの4元ベクトル x' への変換

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & & & \beta\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \beta\gamma & & & \gamma \end{pmatrix} \qquad \gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$$

に対して,

$$S = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sigma_3 \dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1} \\ \sigma_3 \dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1} & 1 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$S^{-1}\gamma^{\mu} S = a^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$$

$$S^{-1} = \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0$$

が満たされていることを示せ。但し $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ (Dirac 表示) を用いる。

[Hint] $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$

すなわち $\sigma_i\sigma_3 + \sigma_3\sigma_i = 2\delta_{i3}$, $\sigma_3\sigma_i\sigma_3 = 2\delta_{i3}\sigma_3 - \sigma_i$

---

[6] 難度:中 ($\bar{f} + \gamma^* \to \bar{f}$, $f + \bar{f} \to \gamma^*$)

静止した反fermion(質量 m)が光子を吸収する場合を考える。

(1) 反fermionの運動量が $0 \to p\hat{z}$ ($p \neq 0$) と変化し, スピンのz軸成分は, $+1/2$ から$-1/2$へと -1 変化した。

$$\vec{p}_1 = 0 \qquad \to \qquad \vec{p}_2 = p\hat{z}$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この時の相互作用の振幅のスピン部分はFeynman則を使うと

$$\bar{v}_1(\vec{0})\gamma^{\mu} v_2(p\hat{z})\varepsilon_{\mu}$$

但し $v_{1(2)}$ は始(終)状態の反fermion spinor $v_i(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_i}{E_i+m}\chi_i \\ \chi_i \end{pmatrix}$

ε^{μ}は光子の偏極ベクトル $\varepsilon^{\mu} = (0, \vec{\varepsilon})$ [$\varepsilon_{\mu} = (0, -\vec{\varepsilon})$]

と書ける。振幅が0にならないためには, 光子のスピンは, $J_z = -1$ [すなわち$\varepsilon^{\mu} = (0, 1, -i, 0)/\sqrt{2}$]でなければならないことを示し, 角運動量が保存されていることを確認せよ。

(2) 実は, 小問(1)のような相互作用は現実に観測される光子に対しては起こらない。理由を述べよ。

[hint] 初期状態の反fermionの4元運動量が$q^{\mu} = (m, \vec{0})$, 光子吸収後の反fermionの

4元運動量が$p^{\mu} = (E, p\hat{z})$ $p \neq 0$, $E = \sqrt{m^2+p^2}$ とすると光子の不変質量は?

次に静止したfermion(質量 m)と静止した反fermion(質量 m)が対消滅して静止した光子(現実にはあり得ないが, 仮想的に質量$2m$の光子があったとして)が生成されたとする。

(3) ファインマン則を使って, この相互作用の振幅のスピンの部分を

fermion spinor: $u_s = N\begin{pmatrix} \phi_s \\ 0 \end{pmatrix}$, 反fermion spinor: $v_s = N\begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix}$,

及び 光子の偏極ベクトル: $\varepsilon^\mu = (0, \vec{\varepsilon})$

を用いて表し, 振幅が

$$-N^2(\chi_s^\dagger \vec{\sigma} \phi_s) \cdot \vec{\varepsilon}^*$$

となることを示せ (レポート問題 No.1 [4]で計算した $-\chi^\dagger \sigma_i \phi$ という量は, これである)。

---

[7] 難度:易〜中 (フェルミオン2粒子系の波動関数)

フェルミオンの粒子の消滅演算子 $c_s(\vec{p})$ (sは, スピン状態を表すindex)は, 反交換関係

$$\{c_s(\vec{p}), c_r^\dagger(\vec{p}')\} = (2\pi)^3\, 2E\, \delta_{sr}\delta(\vec{p}-\vec{p}') \qquad \{c, c\} = 0$$

を持つ。また, 任意の消滅演算子に対して, 真空 $|0\rangle$ は, $c|0\rangle = 0$ を満たす。

今, フェルミオンの2粒子状態(運動量$\vec{p}_1, \vec{p}_2$, スピン s, r)を

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2; s, r\rangle = \hat{c}_s^\dagger(\vec{p}_1)\hat{c}_r^\dagger(\vec{p}_2)|0\rangle$$

とする。また, 2粒子の位置固有状態を, $u_s(\vec{p})$ を運動量 $\vec{q}$, spin s を持つDirac spniorとして

$$\begin{aligned}|\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2!}}\hat{\psi}^\dagger(t, \vec{x}_1)\hat{\psi}^\dagger(t, \vec{x}_2)|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}}\iint \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3\, 2E_1}\frac{d^3q_2}{(2\pi)^3\, 2E_2}\sum_{a,b} u_a^\dagger(\vec{q}_1)u_b^\dagger(\vec{q}_2)c_a^\dagger(\vec{q}_1)c_b^\dagger(\vec{q}_2)|0\rangle e^{-iq_1x_1}e^{-iq_2x_2}\end{aligned}$$

とする。

(1) 次の等式を示せ。

$$\begin{aligned}&\langle 0|c_b(\vec{q}_2)c_a(\vec{q}_1)c_s^\dagger(\vec{p}_1)c_r^\dagger(\vec{p}_2)|0\rangle \\ &\quad= (2\pi)^3\, 2E_1\, \delta_{as}\delta(\vec{p}_1-\vec{q}_1)(2\pi)^3\, 2E_2\, \delta_{br}\delta(\vec{q}_2-\vec{p}_2) \\ &\qquad - (2\pi)^3\, 2E_1\, \delta_{bs}\delta(\vec{q}_2-\vec{p}_1)(2\pi)^3\, 2E_2\, \delta_{ar}\delta(\vec{q}_1-\vec{p}_2)\end{aligned}$$

(2) フェルミオン2粒子の波動関数が

$$\begin{aligned}&\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, t|\vec{p}_1, \vec{p}_2; s, r\rangle \\ &\quad= \frac{1}{\sqrt{2!}}\{u_r(\vec{p}_2)u_s(\vec{p}_1)e^{-ip_1x_1}e^{-ip_2x_2} - u_s(\vec{p}_1)u_r(\vec{p}_2)e^{-ip_2x_1}e^{-ip_1x_2}\}\end{aligned}$$

となることを示せ。(u_s はc数ではない。u_s 同士の順番は勝手に入れ換えできないことに注意)

[EOF]