

下記設問 [1~5] から最低1問以上選んで回答せよ。

[1] 難度: 易 [Gordon decomposition]

$u(p)$ を4元運動量 p^μ をもつ Fermion の spinor とするとき、次の等式を導け。

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{(p'+p)^\mu}{2m} + \frac{i}{2m}\sigma^{\mu\nu}k_\nu\right]u(p)$$

$$\text{但し } k^\mu \equiv (p' - p)^\mu \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\text{Hint: } \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \bar{u}(\not{p}' - m) = 0, (\not{p} - m)u = 0$$

[2] 難度: 中 [Dirac粒子の磁気能率]

静磁場 $A^\mu = (0, \vec{A})$ 中にある電荷 qe , スピン s , 質量 m , 運動量 $\vec{p}$ (非相対論的 $|\vec{p}| \ll m$) の Dirac 粒子のポテンシャルを考える。Gordon decomposition (問[1]参照) を用いると電磁場と Dirac 粒子の相互作用項は,

$$qe\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \rightarrow U = qe\frac{1}{m}\bar{u}_s u_s p^\mu A_\mu - qe\frac{1}{2m}\bar{u}_s \sigma^{\mu\nu} u_s \partial_\nu A_\mu$$

と書ける。但し $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, $A_\mu = (0, -\vec{A})$ に注意。

ここで、1個の粒子が非相対論的運動をしていることから規格化定数 N , および $|\vec{p}| \ll m$ を仮定して

$$u = N \begin{pmatrix} \phi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \phi_s \end{pmatrix} \rightarrow N \begin{pmatrix} \phi_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{但し } N=1 \quad \text{すなわち } \phi_s^\dagger \phi_s = 1$$

とすると、上の式は、Dirac 粒子のスピン $\vec{s}$ ($s_k \equiv \frac{1}{2}\phi_s^\dagger \sigma_k \phi_s$) を用いて

$$U = -qe\vec{v} \cdot \vec{A} - \frac{qe}{m}\vec{s} \cdot \vec{B}$$

と表せることを示せ。

$$\text{Hint: } \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad B_k = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j \quad (\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$$

[3] 難度: 易 [カイラリティ]

(1) Chirality 固有状態は、0でない質量を持たないことを示せ。

Hint: $\gamma^5 \psi = \psi$, もしくは $\gamma^5 \psi = -\psi$ のとき

Dirac 方程式 $(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi = 0$ から $m=0$ を導け。

(2) C(荷電共役)変換において Left-handed chirality は、Right-handed chirality

と変換されることを確かめよ。

$$\text{Hint: } \gamma^5 \psi_L = -\psi_L \xrightarrow{C} \gamma^5 (\psi_L)^C = (\psi_L)^C \quad \text{但し } \psi^C = C\bar{\psi}^T = i\gamma^2 \psi^* \text{ を示せばよい。}$$

[4] 難度: 易 [左巻きカイラリティの massless 反粒子 (例えば反ニュートリノ) のヘリシティ]

反fermion の Dirac spinor は、2成分spinor を χ として Dirac 表示で

$$v = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi \\ \chi \end{pmatrix} \quad N \text{は規格化定数}$$

と書ける。この粒子のLeft-handed chirality 状態 $P_L v = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v$ を考えよう。

今, $m = 0$, 運動方向を $+z$ 方向($\vec{p} = (0, 0, p)$)と仮定して, 反fermionのスピンの $+z$ 方向, すなわちhelicity (+)のみが許されることを示せ。

※反fermionの2成分spinor は $+z$ 方向スピン $\chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $-z$ 方向スピン $\chi_\downarrow = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に注意。

[5] 難度: 中 [$V \rightarrow f + \bar{f}$ (ベクトル型結合における)の Helicity保存]

重たい中性ベクトル粒子(V)がvector型結合する相互作用で崩壊して fermion(f)・反fermion対($\bar{f}$)に崩壊する $V \rightarrow f + \bar{f}$ 過程を粒子 V の静止系で考える。

$f, \bar{f}$ は, それぞれ逆方向に momentum の大きさ p で飛翔した。 f の飛翔方向を z 軸方向と定義する。ファインマン則を使い, この崩壊の振幅におけるスピンに関する部分は

$$\bar{u}(p\hat{z})\gamma^\mu v(-p\hat{z})\varepsilon_\mu$$

と書ける。ここで ε_μ は, 粒子 V の偏極ベクトルを表す。また u, v は, それぞれ $f, \bar{f}$ の spinor で,

$$\begin{aligned} u(p\hat{z}) &= N \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{p\sigma_3}{E+m}\phi \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \phi \\ \alpha\sigma_3\phi \end{pmatrix} \\ v(-p\hat{z}) &= N \begin{pmatrix} -\frac{p\sigma_3}{E+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} -\alpha\sigma_3\chi \\ \chi \end{pmatrix} \\ N &\text{は規格化定数} \quad \alpha \equiv \frac{p}{E+m} \quad E^2 = m^2 + p^2 \quad \phi, \chi : 2\text{成分spinor} \end{aligned}$$

と表される。

$$(1) \bar{u}(p\hat{z})\gamma^\mu v(-p\hat{z}) = \{0, (1 + \alpha^2)\phi^\dagger\sigma_1\chi, (1 + \alpha^2)\phi^\dagger\sigma_2\chi, (1 - \alpha^2)\phi^\dagger\sigma_3\chi\}$$

となることを確認せよ。

(2) $f, \bar{f}$ のスピンについて z 軸成分で考え, その大きさが $+1/2, -1/2$ の時の ϕ, χ は, それぞれ

$$\phi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \phi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \chi_\downarrow = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。以下の4つのスピン状態の組み合わせについて, $\phi^\dagger\sigma_1\chi, \phi^\dagger\sigma_2\chi, \phi^\dagger\sigma_3\chi$ を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} \phi_\uparrow^\dagger\sigma_1\chi_\uparrow & \phi_\uparrow^\dagger\sigma_2\chi_\uparrow & \phi_\uparrow^\dagger\sigma_3\chi_\uparrow \\ \phi_\uparrow^\dagger\sigma_1\chi_\downarrow & \phi_\uparrow^\dagger\sigma_2\chi_\downarrow & \phi_\uparrow^\dagger\sigma_3\chi_\downarrow \\ \phi_\downarrow^\dagger\sigma_1\chi_\uparrow & \phi_\downarrow^\dagger\sigma_2\chi_\uparrow & \phi_\downarrow^\dagger\sigma_3\chi_\uparrow \\ \phi_\downarrow^\dagger\sigma_1\chi_\downarrow & \phi_\downarrow^\dagger\sigma_2\chi_\downarrow & \phi_\downarrow^\dagger\sigma_3\chi_\downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{pmatrix}$$

(3) 粒子 V に特定の偏極が無い(+, -, 0 が等確率に混合した状態)とする。

$|\bar{u}(p\hat{z})\gamma^\mu v(-p\hat{z})\varepsilon_\mu|^2$ を計算することにより, $f, \bar{f}$ のスピンの z 成分が $\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow$ となる割合が

$$P(\uparrow\uparrow):P(\uparrow\downarrow):P(\downarrow\uparrow):P(\downarrow\downarrow) = 2(1 + \alpha^2)^2:(1 - \alpha^2)^2:(1 - \alpha^2)^2:2(1 + \alpha^2)^2$$

となることを示し, $f, \bar{f}$ のスピンの z 成分が揃う($\uparrow\uparrow$ または $\downarrow\downarrow$)確率が

$$P(\uparrow\uparrow \text{ or } \downarrow\downarrow) = \frac{2(1 + 2\alpha^2 + \alpha^4)}{3 + 2\alpha^2 + 3\alpha^4}$$

となることを示せ。

なお, 粒子 V の z 軸に関しての偏極状態は,

$$\varepsilon^\mu(+)= (0, -1, -i, 0)/\sqrt{2}$$

$$\varepsilon^\mu(-)= (0, 1, -i, 0)/\sqrt{2}$$

$$\varepsilon^\mu(0)= (0, 0, 0, 1)$$

である。

(4) (3) で求めた確率が $\alpha \rightarrow 1$ の極限 ($m \ll p$) で $P(\uparrow\uparrow \text{ or } \downarrow\downarrow) = 1$ になることを「ベクトル型結合における chirality 保存」の観点から説明せよ。

また, $\alpha = 0$ ($p = 0$) で $P(\uparrow\uparrow \text{ or } \downarrow\downarrow) = 2/3$ になることを「2体の spin-1/2 粒子系の spin 合成則」の観点から説明せよ。

$$|1, +1\rangle = |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$$

$$|1, -1\rangle = |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$$

[EOF]