素粒子物理学 レポート問題 No.4

2025/7/12

下記設問 [1〜3] から最低1問以上選んで回答せよ.

---

[1] 難度:易 (電弱理論の定数)

Enrico Fermiが1930年代にベータ崩壊を説明する理論として提唱したフェルミ相互作用では，ベータ崩壊は，4つのフェルミ粒子が1点で結合するとし，その結合の強さを表す定数をフェルミ結合定数を G_F と定義した。フェルミ結合定数は，標準模型では自然単位系で $G_F \equiv \dfrac{\sqrt{2}g^2}{8M_W^2}$ と記述され，

$$G_F = 1.17 \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$$

と測定されている。また，θ_Wを Weinberg 角として

$$\sin^2\theta_W = 0.231,$$

および微細構造定数は,

$$\alpha = e^2/4\pi \sim 1/137 \text{ (無次元量)}$$

と測定されている。

上記に記載した測定値，および標準模型(電弱理論)より得られる関係式を必要に応じて用い，その関係式を明示しつつ自然単位系(+Heviside-Lorentz単位系)で，以下に有効数字3桁で答えよ。

(1) Higgs場の真空期待値 v [GeV] を求めよ。

(2) 素電荷e [無次元]，および弱い相互作用の結合定数g [無次元]を求めよ。

(3) Wボゾンの質量，及びZボゾンの質量を予言し，PDG の値と比較せよ。

PDG (Paritcle Data Group) http://pdg.lbl.gov/

WやZの質量は，PDG の top page から Summary tables→Gauge & Higgs boson にある。

(4) (3)で求めたM_WやM_Zの計算結果は，PDGに記載された実測値とほぼ一致するが，測定精度以上の「ずれ」がある(かけ離れた値が出た場合は計算が間違っているのでやり直し)。

実は，微細構造定数$\alpha \sim 1/137$という値は，低エネルギー領域での値であり，測定する際のエネルギースケールに依存して変化する。逆にPDGに載っているM_Wの実測値から α^{-1} を求めてみよ。

注:無次元量でないものは単位 [GeVのべき乗] も忘れずに！

---

[2] 難度:中 ($Q = T^3 + Y/2$)

$(T, T^3) = \left(\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{2}\right)$, $Y = Y_{\mathrm{FL}}$ の量子数を持つ Left-handed fermion: $F_L = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \chi_L \end{pmatrix}$, および $T = 0$, $Y = Y_{\phi R}$, $Y_{\chi R}$ の量子数を持つ Right-handed fermion: ϕ_R, χ_R の場を仮定する。

これらの fermion場に対して $\mathrm{SU}(2)_L \times U(1)_Y$ 局所ゲージ不変な運動エネルギー項の Lagrangian density は，ゲージ場 B_μ, $A_\mu^l (l = 1, 2, 3)$ を導入して，

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}}^{\text{kin}} = \bar{F}_L \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - g' \frac{Y_{FL}}{2} B_\mu - g \frac{\tau^l}{2} A_\mu^l \right] F_L$$

$$+ \bar{\phi}_R \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\phi R}}{2} B_\mu \right] \phi_R + \bar{\chi}_R \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - g' \frac{Y_{\chi R}}{2} B_\mu \right] \chi_R$$

のように与えられる。

(1) 電磁場A_μ, およびZボゾン場Z_μがB_μ, A^3_μ から以下のように定義される。

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} \qquad e \equiv \frac{g\,g'}{\sqrt{g^2+g'^2}} = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W$$

以下の関係式を示せ。

$$g\,A^3_\mu = e\,A_\mu + g\cos\theta_W Z_\mu \qquad g' B_\mu = e\,A_\mu - \frac{g}{\cos\theta_W}\sin^2\theta_W Z_\mu$$

(2) 上記 Lagragian density $\mathcal{L}^{\rm kin}_{\rm fermion}$ に(1)で求めた関係式を代入し，電磁場A_μと結合する項のみを抜き出した Lagragian density $\mathcal{L}_{\rm EMint}$を以下の様にQ_{FL}, $Q_{\phi R}$, $Q_{\chi R}$ を用いて書き下した。Left-handed, right-handed カレント共に $Q = T^3 + \dfrac{Y}{2}$ の関係になっていることを確かめよ。

$$\mathcal{L}_{\rm EMint} = -e\bar{F}_L\gamma^\mu[Q_{FL}]F_L A_\mu - e\bar{\phi}_R\gamma^\mu[Q_{\phi R}]\phi_R A_\mu - e\bar{\chi}_R\gamma^\mu[Q_{\chi R}]\chi_R A_\mu$$

(注: $T^3 = \dfrac{\tau^3}{2}$)

---

[3] 難度:易 (Z の崩壊分岐比)

Zボゾンとフェルミオンとの結合を表す項は，

$$\mathcal{L}_{Z\rm int} = -\frac{g}{\cos\theta_W} J^\mu_Z Z_\mu \qquad 但し\ J^\mu_Z \equiv J^{3\mu} - \sin^2\theta_W J^\mu_{\rm EM}$$

となっており，Zボゾンに対して質量が無視できる fermion 対へ崩壊($Z \to f\bar{f}$)する確率(崩壊分岐比)は，left-handed ($T^3 = \pm 1/2$)と right-haned ($T=0$) fermionからの寄与を考慮して

$$|T^3 - \sin^2\theta_W Q|^2 + |\sin^2\theta_W Q|^2$$

に比例すると考えられる。但し $\sin^2\theta_W \sim 0.23$ とする。

Particle Data Group によるとZ粒子の崩壊分岐比は，

$Z \to \ell\bar{\ell}$ ($\ell = e, \mu, \tau$)	~3.4%
$Z \to$ invisible($\nu_e\bar{\nu}_e + \nu_\mu\bar{\nu}_\nu + \nu_\tau\bar{\nu}_\tau$)	20.0%
$Z \to u\,\bar{u}$ ($u = u, c$:up-type quark)	11.6%
$Z \to d\,\bar{d}$ ($d = d, s, b$: down-type quark)	15.6%

となっている。(https://pdg.lbl.gov → Summary Tables → Gauge & Higgs Bosons)

以下の表を完成させて，上の崩壊分岐比を説明せよ。

lepton, quark はそれぞれ3世代($N_{\rm gen} = 3$)あり，また quark は更に color という量子数を持っており，colorが3種類($N_{\rm col} = 3$)であるため，崩壊確率が$N_{\rm col} \times N_{\rm gen}$倍される。

(但し，Zは質量の大小関係から top quark対には崩壊できないため，up-type quarkの実効的な世代数は，$N_{\rm gen} = 2$となることに注意。)

	T^3	Q	$L \equiv \lvert T^3 - \sin^2\theta_W Q\rvert^2$	$R \equiv \lvert\sin^2\theta_W Q\rvert^2$	$\Gamma \equiv L + R$	$\Gamma \times N_{\rm col} \times N_{\rm gen}$	$\dfrac{\Gamma \times N_{\rm col}}{\rm sum}$
ν_ℓ	$1/2$	0	$(1/2)^2 = 0.25$	0	0.25	$0.25 \times 1 \times 3 = 0.75$	
ℓ	$-1/2$						
u	$1/2$						
d	$-1/2$						
						sum=	

[EOF]