

下記設問 [1～8] から最低1問以上選んで回答せよ。

[1] (難度: 中～難) μ 粒子崩壊の不変振幅のトレース計算

μ 粒子の崩壊($\mu(p) \rightarrow \nu_\mu(p') + e(q) + \bar{\nu}_e(q')$)における Matrix element に対して

$$\sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = 2G_F^2 p_\rho p'_\sigma q'^\lambda q^\delta \text{Tr}[(1 + \gamma^5) \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma] \times \text{Tr}[(1 + \gamma^5) \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\delta]$$

を計算すると

$$\sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = 128 G_F^2 (pq')(p'q)$$

となることを示せ。(以下の公式を使ってよい)

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4[g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}]$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = -4i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\varepsilon^{0123} = 1 \text{ convention})$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\lambda\delta} = -2(g^{\rho\lambda} g^{\sigma\delta} - g^{\rho\delta} g^{\sigma\lambda})$$

[2] (難度: 易) 質量殻上の微小運動量空間体積要素

全領域積分の中で成り立つ次の等式を確かめよ。

$$\frac{d^3 p}{2E} = d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(E) \quad \text{但し } p = (E; \vec{p}), E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

また,

$$\frac{d^3 p}{2E} = \frac{|\vec{p}|}{2} dE d\Omega$$

とも書けることを示せ。

Hint: デルタ関数の公式

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad \text{where } f(x_i) = 0$$

を使えば

$$\delta(m^2 - p^2) \theta(E) = \frac{\delta(E - \sqrt{m^2 + \vec{p}^2})}{2E}$$

となることを示し, dE で積分を実行すればよい。

[3] (難度: 中) 2体崩壊のdLIPS

(1) 静止した質量 m の粒子が質量 m_1, m_2 の粒子1,2 に崩壊するとき

$$E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m}$$

の関係式を示せ。

Hint: $p = (m, \vec{0})$, $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ として $p = p_1 + p_2$ より $p_2^2 = m_2^2 = (p - p_1)^2$ を計算せよ。

(2) 静止した粒子の2体崩壊におけるdLIPSは,

$$d\Phi_2(m; p_1, p_2) = \frac{1}{4(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}_1|}{m} d\Omega_1 \quad \Omega_1 \text{は粒子1の方向}$$

と書けることを示せ。

Hint: 設問[2]の等式を使えば2体崩壊のdLIPSは,

$$\begin{aligned} d\Phi_2(m; p_1, p_2) &= (2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(p - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} d^4 p_2 \theta(E_2) \delta(p_2^2 - m_2^2) \end{aligned}$$

ここで, $d^4 p_2$ の積分を実行すると更に

$$d\Phi_2(m; p_1, p_2) = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p_1}{2E_1} \theta(m - E_1) \delta((p - p_1)^2 - m_2^2)$$

と書ける。更に設問[2]で得られる等式より $\frac{d^3 p_1}{2E_1} = \frac{|\vec{p}_1|}{2} dE_1 d\Omega_1$ を代入して

dE_1 で積分を実行する。

delta関数の中身 $(p - p_1)^2 - m_2^2$ は, (1)で求めた E_1 で 0 になることに注意して

設問[2]のHint中のデルタ関数の公式を使う必要がある。

[4] (難易度: 中) 3体崩壊のdLIPS

特定の方向に依存しない静止した粒子(スピン0やスピン平均を取る場合など)の3体崩壊におけるdLIPSは,

$$d\Phi_3(m; p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{4(2\pi)^3} dE_1 dE_2$$

と書けることを示せ。

Hint: 設問[2]で得られる等式を使えば3体崩壊のdLIPSは,

$$\begin{aligned} d\Phi_3(m; p_1, p_2, p_3) &= (2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \delta^4(p - p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} d^4 p_3 \theta(E_3) \delta(p_3^2 - m_3^2) \end{aligned}$$

ここで, $d^4 p_3$ での積分を実行すると更に

$$d\Phi_3(m; p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \theta(m - E_1 - E_2) \delta((p - p_1 - p_2)^2 - m_3^2)$$

と書ける。更に設問[2]により,

$$\frac{d^3 p_1}{2E_1} = \frac{p_1}{2} dE_1 d\Omega_1 \quad \frac{d^3 p_2}{2E_2} = \frac{p_2}{2} dE_2 d(\cos\theta_{12}) d\varphi_2 \quad \text{但し}\theta_{12}\text{は, } \vec{p}_1\text{と}\vec{p}_2\text{のなす角}$$

親粒子に特定の方向への依存性がないとして, $d\Omega_1, d(\cos\theta_{12}), d\varphi_2$ での積分を実行する。

[5] (難易度: 易) 2体の散乱の initial state flux

2体の粒子衝突において、入射粒子(粒子1)の標的粒子(粒子2)に対するフラックス F は、粒子1, 2の相対速度を v_{12} とすると $F = 2E_1 \cdot 2E_2 \cdot v_{12}$ となる。但し $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ は、平行 ($\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$) とする。

$$v_{12} = \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right|$$

を使い、

$$F = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

を示せ。更に粒子1,2の重心系において、粒子1,2の運動量の大きさを p とすると、

$$F = 4p\sqrt{s}$$

となることを示せ。ここで $s \equiv (p_1 + p_2)^2$ と定義され、重心系では $s = (E_1 + E_2)^2$ となる。

[6] (難度: 難~Challenging) top quark 崩壊幅

top quark は、ほぼ100% bottom quark と W^+ ボゾンに崩壊する。

このプロセスを $t(p; s) \rightarrow b(q; r) + W^+(k; \lambda)$ (s, r, λ はスピン・偏極のindex)として、不変振幅を書き下すと

$$-i\mathcal{M} = U_{tb}^* \bar{u}_b(q; r) \left(-i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) u_t(p; s) \varepsilon_\mu^*(k; \lambda)$$

となる。

$U_{tb} \sim 1$, $m_b \sim 0$ と近似できるとする。

(1) 不変振幅の絶対値の2乗のスピン和が以下のようになることを示せ。

$$\sum_{r, s, \lambda} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{4} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma (1 + \gamma^5)] p_\rho q_\sigma (-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m_W^2)$$

以下の関係式を使ってよい。

$$\sum_{s=1,2} u_t(p; s) \bar{u}_t(p; s) = \not{p} + m_t \quad \sum_{\lambda=+, -, 0} \varepsilon_\mu^*(k, \lambda) \varepsilon_\nu(k, \lambda) = -g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m_W^2$$

(2) トレース計算を実行し、以下を示せ。

$$\sum_{r, s, \lambda} |\mathcal{M}|^2 = g^2 \left[pq + \frac{2}{m_W^2} (pk)(qk) \right]$$

以下の公式を使ってよい。

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4[g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}]$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = -4i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\varepsilon^{0123} = 1 \text{ convention})$$

(3) $p = (m_t, \vec{0})$, $q = (E_b, \vec{q})$, $k = (m_t - E_b, -\vec{q})$ とおいて

$$E_b \sim \frac{m_t^2 - m_W^2}{2m_t}$$

を示し、

$$\sum_{r, s, \lambda} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{m_W^2} m_t^3 \left[1 + 2 \frac{m_W^2}{m_t^2} \right] E_b$$

を示せ。

(4) 2体崩壊の dLIPS の公式 $d\Phi = \frac{1}{16\pi^2} \frac{E_b}{m_t} d\Omega_b$ を用いると

$$d\Gamma = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{2m_t} d\Phi = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{32\pi^2 m_t^2} E_b d\Omega_b \quad \Omega_b \text{ は, bottom quark の飛ぶ方向}$$

となる。但し初期状態 top quark のスピン状態は、2通りなので $|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2$

top quark の全崩壊幅が

$$\Gamma = \frac{G_F}{8\pi\sqrt{2}} m_t^3 \left(1 + 2\frac{m_W^2}{m_t^2}\right) \left(1 - \frac{m_W^2}{m_t^2}\right)^2$$

となることを示せ。但し $\frac{G_F}{\sqrt{2}} \equiv \frac{g^2}{8m_W^2}$

(5) $G_F \sim 1.17 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$, $m_t = 173 \text{ GeV}$, $m_W = 80.4 \text{ GeV}$ を仮定して, top quark の全幅を計算し, PDG の値と比較してみよ。

PDG (Particle Data Group) <http://pdg.lbl.gov/>

top quark の Full width は, PDG の top page から

Summary tables → Quarks にある。

[7] (難度: Challenging) W helicity in top quark decay

top quark が bottom quark と W^+ ボゾンに崩壊 ($t \rightarrow W^+ b$) する際, top quark 静止系において W^+ ボゾンのヘリシティ(スピンの運動方向成分) が $+$, 0 , $-$ となる割合が, およそ $0:7:3$ になることが知られている。これを以下の小問に従って示せ。

top quark decay を $t(p; s) \rightarrow b(q; r) + W^+(k; \lambda)$ (s, r, λ はスピンの index) として, 不変振幅 (以下, W helicity 割合に関係しない比例定数は全て省く) は,

$$M \propto \bar{u}_b(q; r) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_t(p; s) \varepsilon_\mu^*(k; \lambda)$$

となる。

なお b -quark の質量 m_b は, $4 \sim 5 \text{ GeV}$ 程度 ($m_b^2 \ll m_W^2 < m_t^2$) であり, $m_b \sim 0$ と近似できるとする。また top quark 静止系における b -quark の飛行方向を z -軸の正方向と定義する。

top の静止系における b -quark の 4-momentum を $q^\mu = (q, q\hat{z})$ ($q > 0$) とする。

(1) $q = \frac{m_t^2 - m_W^2}{2m_t}$ を示せ。

(2) top の静止系において top, bottom の Dirac spinor (規格化定数を省く) は,

それぞれの粒子の spin を表す 2 成分 spinor を ϕ_t, ϕ_b として,

$$u_t = \begin{pmatrix} \phi_t \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_b = \begin{pmatrix} \phi_b \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot q\hat{z}}{E_b + m_b} \phi_b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \phi_b \\ \sigma_3 \phi_b \end{pmatrix}$$

と書ける。

$$M \propto (\phi_b^\dagger (1 - \sigma_3) \phi_t, -\phi_b^\dagger (1 - \sigma_3) \vec{\sigma} \phi_t)^\mu \varepsilon_\mu^*(k, \lambda)$$

を示せ。なお, 上式中, 反変 4 元ベクトル (a_0, a_1, a_2, a_3) を $(a_0, \vec{a})^\mu$ のように表記している。但し $\vec{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$

(3) (2) の結果から, b -quark のヘリシティは, 必ず負となることを示せ。

(4) W ボゾンの偏極ベクトル $\varepsilon_\mu(k; \lambda)$ は、ローレンツベクトルとしての変換性を持つ。 W ボゾンの静止系において、偏極の z 成分が $+$, 0 , $-$ のものは、

$$\varepsilon^\mu(\vec{0}; \lambda=+) = (0, -1, -i, 0) / \sqrt{2}$$

$$\varepsilon^\mu(\vec{0}; \lambda=0) = (0, 0, 0, 1)$$

$$\varepsilon^\mu(\vec{0}; \lambda=-) = (0, 1, -i, 0) / \sqrt{2}$$

と書ける。top の静止系で、これらの偏極ベクトルを見る場合、偏極が $\lambda = \pm$ のものは、 W ボゾンの飛行方向 ($-z$ 方向) の Lorentz boost に対して不変であるが、偏極が $\lambda = 0$ のものは、 W ボゾンの運動量 $k^\mu = (E_W, -q\hat{z})$ による Lorentz boost で

$$\varepsilon^\mu(-q\hat{z}, \lambda=0) = (-q, 0, 0, E_W) / m_W$$

となることを示せ。

(5) top quark の spin ϕ_t それぞれの場合について、 W ボゾンは

$$(a) \phi_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の場合は, } \varepsilon_\mu(-q\hat{z}, \lambda=+)$$

$$(b) \phi_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の場合は, } \varepsilon_\mu(-q\hat{z}, \lambda=0)$$

の偏極のみが可能であることを示せ。

(6) 小問(5)の (a), (b) の場合の M の値をそれぞれ M_+ , M_0 とすると

$$|M_+|^2 \propto 8$$

$$|M_0|^2 \propto 4m_t^2 / m_W^2$$

となることを示し、 $m_t = 173\text{GeV}$, $m_W = 80.4\text{GeV}$ を使って、比

$$|M_+|^2 : |M_0|^2$$

を計算して、題意であった W^+ ボゾンのヘリシティの割合を示せ。

(注) z -軸の定義により W ボゾンの飛行方向は $-z$ 方向であり、 $\lambda = +$ は、負helicity に対応

[8] (難度:Challenging++) 偏極ミューオン崩壊

静止した偏極した μ^- の3体崩壊

$$\mu^-(t) \rightarrow e^-(q) + \nu_\mu(k) + \bar{\nu}_e(p)$$

について考える。 t, q, k, p は、それぞれの $\mu^-, e^-, \nu_\mu, \bar{\nu}_e$ の4元運動量であり、

$$t^\mu = (m, \vec{0}) \quad q^\mu = (q, q\hat{q}) \quad k^\mu = (k, k\hat{k}) \quad p^\mu = (p, p\hat{p})$$

と記述されたとする。ただし $\hat{q}, \hat{k}, \hat{p}$ は単位ベクトルを表し、 e, ν は massless とした。

$\mu^-, e^-, \nu_\mu, \bar{\nu}_e$ の Dirac spinor をそれぞれ、

$$u(t) = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad u(q) = \begin{pmatrix} \eta \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{q} \eta \end{pmatrix} \quad u(k) = \begin{pmatrix} \xi \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{k} \xi \end{pmatrix} \quad v(p) = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

と書く。ここでは簡単のため、spinor の規格化因子は無視して考える。

ϕ, η, χ, ξ は、それぞれの粒子の2成分spinor であり、 μ^- は、 $+z$ 方向に偏極している粒子とし、

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。

μ^- の3体崩壊における行列要素に比例する量 M として、

$$M = \{\bar{u}(k)\gamma_\mu(1-\gamma^5)u(t)\}\{\bar{u}(q)\gamma^\mu(1-\gamma^5)v(p)\}$$

を考え、以下の設問にしたがって偏極した μ^- の3体崩壊における娘粒子の角度分布について導け。

(1)

$$\bar{u}(k)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(t) = \xi^\dagger(1-\vec{\sigma}\cdot\hat{k})(1,-\sigma_i)^\mu\phi$$

を示せ。なお $(1,-\sigma_i)^\mu$ は、反変4元ベクトル $(1,-\sigma_1,-\sigma_2,-\sigma_3)$ を意味する。

(2) ϕ を任意の4成分Dirac spinor とし、

$$\phi^C = C\bar{\phi}^T = i\gamma^2\phi^* \quad \text{但し } C = i\gamma^2\gamma^0$$

とする。 C は、

$$C(\gamma^\mu)^TC^{-1} = -\gamma^\mu \quad C(\gamma^5)^TC^{-1} = \gamma^5$$

$$C = -C^T = -C^{-1} = -C^\dagger$$

を満たす。これらの性質を使い、

$$\overline{\phi^C} = -\phi^TC^{-1}$$

$$C\{\gamma^\mu(1-\gamma^5)\}^TC^{-1} = -\gamma^\mu(1+\gamma^5)$$

を示せ。

(3) ϕ, ψ を任意の4成分Dirac spinor とする。一般的に

$$\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\phi = -\overline{\phi^C}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi^C$$

となることを示せ。

Hint: spinor 表現の空間ではスカラーなので、全体のTranspose を取ることができる。ただし、それによって ψ, ϕ の順番を入れ替えることになるため、Dirac場の反可換性から $(-)$ の符号が入ることに注意せよ。

(4) (3) の結果を用いると

$$\bar{u}(q)\gamma^\mu(1-\gamma^5)v(p) = -\overline{v^C}(p)\gamma^\mu(1+\gamma^5)u^C(q)$$

と変形できる。この式は、更に

$$= -\chi^{C\dagger}(1+\vec{\sigma}\cdot\hat{p})(1,\sigma_i)^\mu(1+\vec{\sigma}\cdot\hat{q})\eta^C$$

となることを示せ。但し、

$$v^C(p) = i\gamma^2 v^*(p) = \begin{pmatrix} \chi^C \\ \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\chi^C \end{pmatrix} \quad \chi^C = i\sigma_2\chi^*$$

$$u^C(q) = i\gamma^2 u^*(q) = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{q}\eta^C \\ \eta^C \end{pmatrix} \quad \eta^C = -i\sigma_2\eta^*$$

と表記する。

(5) (1)と(4)の結果を用い,

$$M = -\xi^\dagger(1 - \vec{\sigma} \cdot \hat{k})[\sigma_p + \sigma_i \sigma_p \sigma_i](1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{q})\eta^C$$

と書けることを示せ。但し $\sigma_p \equiv \phi \chi^{C\dagger}(1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{p})$ とする。

(6) 任意の 2×2 行列 τ に対して,

$$\tau + \sigma_i \tau \sigma_i = \text{Tr}(\tau) I_2 \quad I_2 \text{ は, } 2 \times 2 \text{ の単位行列}$$

を確かめ,

$$M = -2\text{Tr}(\sigma_p) \xi^\dagger(1 - \vec{\sigma} \cdot \hat{k})(1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{q})\eta^C \quad \text{但し } \sigma_p \equiv \phi \chi^{C\dagger}(1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{p})$$

以下を示せ。

(7) 娘粒子のスピン測定は行われないので, M については娘粒子のスピン和を取る必要がある。

一般に粒子(反粒子)の2成分spinor $\phi(\chi)$, 及びその運動方向 $\hat{p}$ (単位ベクトル) について, Helicity $\pm$ の固有状態を $\phi_\pm(\chi_\pm)$ と表記すると,

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi_\pm = \pm \phi_\pm$$

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi_\pm = \mp \chi_\pm$$

となる。(※ $\phi_\pm^C, \chi_\pm^C$ は, それぞれ反粒子, 粒子となる。)

M について娘粒子のスピン和を実行すると,

$$\sum_{\chi_\pm, \xi_\pm, \eta_\pm} M = -16(\phi^T \chi_+^{C*})(\xi_-^\dagger \eta_-^C)$$

となることを示せ。

(8) 一般に $\hat{p}$ は, z 軸に対して (θ, φ) 方向だとすると, $\hat{p} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi_\pm = \pm \phi_\pm$$

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi_\pm = \mp \chi_\pm$$

を満たす $\phi_\pm, \chi_\pm$ は, それぞれ

$$\phi_{+,-} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{+,-} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

である。 $\sum_{\chi_\pm, \xi_\pm, \eta_\pm} M = -16(\phi^T \chi_+^{C*})(\xi_-^\dagger \eta_-^C)$ において,

$$|\phi^T \chi_+^{C*}|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta) \quad \text{但し } \theta \text{ は, } \hat{z} \text{ と } \hat{p} \text{ のなす角}$$

$$|\xi_-^\dagger \eta_-^C|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \hat{k} \cdot \hat{q}) \quad \text{但し } \alpha \text{ は, } \hat{k} \text{ と } \hat{q} \text{ のなす角}$$

(Hint: $\hat{k}$ を $+z$ に取り直し, $\hat{q}$ を $(\theta, \varphi) = (\alpha, 0)$ に取り直して考えればよい。)

を示せ。

(9) これまで無視して考えていた Dirac spinor の規格化 $\sqrt{2E}$ にあたる因子は,

$$\sqrt{2m}\sqrt{p}\sqrt{k}\sqrt{q}$$

であり, 実際の μ^- の3体崩壊における行列要素は,

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sqrt{2m}\sqrt{p}\sqrt{k}\sqrt{q} M$$

となる。娘粒子のスピン和を実行した $|\mathcal{M}|^2$ を計算し,

$$\sum_{\chi_{\pm}, \xi_{\pm}, \eta_{\pm}} |\mathcal{M}|^2 = 64G_F^2 mp(1 + \cos\theta)(k^\mu q_\mu)$$

を得よ。また, 親粒子のスピン平均を取ると,

$$\frac{1}{2} \sum_{\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \sum_{\chi_{\pm}, \xi_{\pm}, \eta_{\pm}} |\mathcal{M}|^2 = 64G_F^2 (t \cdot p)(k \cdot q)$$

となり, 授業で行った γ 行列のTrace計算によるスピン平均行列要素の結果と一致することを確認せよ。

[EOF]